

N° d'ordre A.O.10462

Année 1974

THESE

PRESENTEE

A L'U.E.R. SCIENTIFIQUE DE LUMINY

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PHILIPPE COMBE

1) SYMETRIE DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES.
APPLICATIONS A L'ETUDE DE QUELQUES SYSTEMES
PLONGES DANS DES CHAMPS DE SYMETRIE DONNEE.

2) OPERATEURS DE MØLLER POUR UN ATOME DANS
UN CHAMP LASER

Soutenue le 28 septembre 1974 devant la Commission d'Examen:

M. H. BACRY Président

M. L. MICHEL

M. L. O'RAIFEARTAIGH

M. D.W. ROBINSON

Examineurs

THESE

PRESENTEE

A L'U.E.R. SCIENTIFIQUE DE LUMINY

UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE II

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PHILIPPE COMBE

1) SYMETRIE DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES.
APPLICATIONS A L'ETUDE DE QUELQUES SYSTEMES
PLONGES DANS DES CHAMPS DE SYMETRIE DONNEE.

2) OPERATEURS DE MØLLER POUR UN ATOME DANS
UN CHAMP LASER

Soutenue le 28 septembre 1974 devant la Commission d'Examen:

M. H. BACRY

Président

M. L. MICHEL

M. L. O'RAIFEARTAIGH

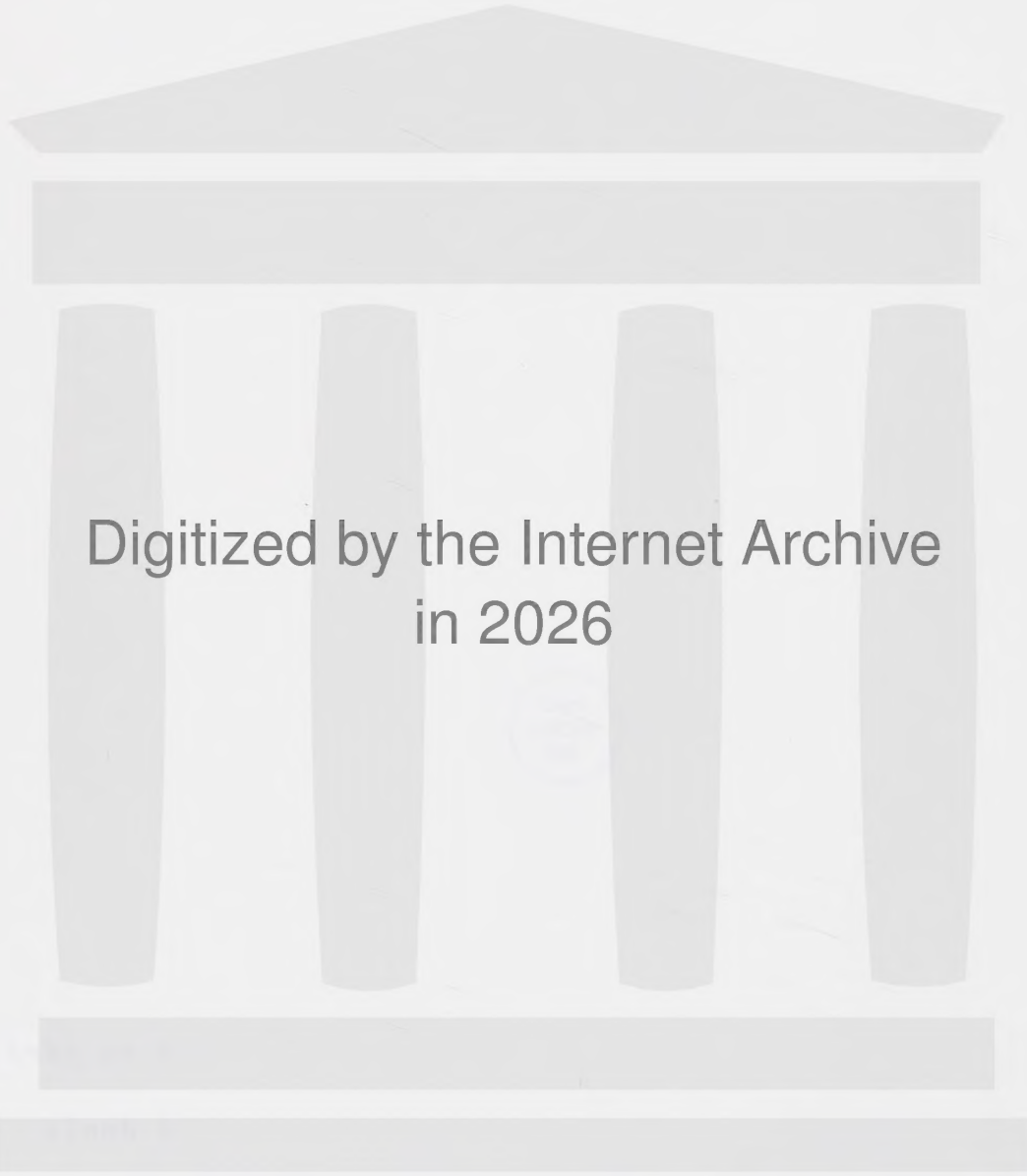
M. D.W. ROBINSON

Examineurs



A ma mère

A Annie



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0003

Mes remerciements vont tout d'abord à Messieurs les Professeurs H. BACRY, D. KASTLER, J. MANDELBROJT et A. VISCONTI qui ont facilité mon intégration au Groupe de Physique Théorique. J'exprime plus particulièrement ma reconnaissance envers Monsieur le Professeur BACRY qui, après m'avoir indiqué une voie de recherche, a montré un intérêt constant pour mes travaux.

Je remercie Messieurs les Professeurs L. MICHEL, L. O'RAIFEARTAIGH et D.W. ROBINSON d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Mes camarades et amis chercheurs du Centre de Physique Théorique m'ont permis de travailler dans une ambiance stimulante et sympathique. Qu'ils en soient remerciés de tout coeur.

Je dois faire une place particulière à J.L. RICHARD et P. SORBA dont la collaboration aura été extrêmement profitable pour moi, aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan humain, ainsi qu'à A. GROSSMANN et M. SIRUGUE que j'ai si souvent mis à contribution. Je leur exprime ici toute mon amitié.

Je voudrais remercier toutes les personnes du secrétariat du Centre de Physique Théorique et du secrétariat du Département de Physique de Luminy pour la compétence et le dévouement qu'elles ont toujours montré, et en particulier Mesdames N. LAMBERT et S. HANANIA qui se sont chargées de la dactylographie et de l'édition de ce travail.

PREMIERE PARTIE : Sous-groupes connexes du groupe de Poincaré.

Introduction

I	Généralités - Notations	I - 1
II	Sous-groupes connexes d'un groupe de Lie inhomogène	I - 8
III	Les sous-groupes connexes de $T(4)$; $L(3,1)$; $E(3)$; $E(2,1)$	I -20
IV	Les fils et petits-fils du groupe de Poincaré	I -47
V	Sous-groupes connexes de dimension 1	I -52
VI	Sous-groupes connexes de dimension 2 et 3	I -62
VII	Sous-algèbres de Lie de dimension 4, 5 et 6	I -81
VIII	Fils et petits-fils des sous-groupes connexes de dimension 6	I -90
IX	Recherche des champs électromagnétiques ayant une symétrie donnée	I -99
Appendice A : Automorphismes d'une algèbre de Lie inhomogène		I-123
Appendice B : Théorèmes sur les algèbres de Lie semi-simples		I-125
Appendice C : Définition du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique extérieur homogène		I-133
Appendice D : Quelques propriétés des tenseurs antisymétriques de rang 2		I-135
Appendice E : Transformations infinitésimales		I-148
Appendice F : Ondes planes électromagnétiques et symétrie		I-151

DEUXIEME PARTIE : Particule élémentaire dans un champ
constant et uniforme.

I	Le cas relativiste	II - 1
II	Le cas non relativiste	II -34
III	Couplage minimal et charge magnétique	II -58

TROISIEME PARTIE

	Opérateurs de Møller pour un atome dans un champ laser...	III - 1
--	---	---------

P R E M I E R E P A R T I E

Sous-groupes connexes du groupe de Poincaré.

INTRODUCTION

La théorie des groupes, en tant qu'expression mathématique des principes d'invariance, joue un rôle très important dans les fondements d'un grand nombre de lois physiques. En particulier, c'est dans le cadre d'une telle théorie que l'on peut donner une base mathématique à la notion de particule élémentaire, en mettant en correspondance les particules "physiques" avec certaines représentations du groupe d'invariance cinématique de l'espace-temps. De façon plus précise, en mécanique quantique on définit un système élémentaire comme une représentation projective unitaire irréductible du groupe de Poincaré [67][68] dans le cas relativiste, ou du groupe de Galilée [29][43] dans le cas non relativiste. Dans le cadre de la mécanique classique, l'espace des mouvements sera un espace homogène pour le groupe d'invariance ; en fait dans le cas de Galilée, l'espace des mouvements est un espace homogène pour le groupe de Galilée étendu [2] [3] [65].

Néanmoins, ces considérations ne conduisent qu'à la description de particules libres, c'est-à-dire sans interaction. Lorsqu'un champ extérieur est présent, la symétrie de Poincaré (ou de Galilée) de l'espace-temps est brisée. Cependant, dans certains cas, cette brisure n'est pas totale et les propriétés de symétrie qui sont encore présentes peuvent être utilisées pour obtenir des informations sur le mouvement des particules.

De telles investigations ont été faites dans le cas où le champ extérieur est soit un champ électromagnétique uniforme et constant [9][34], soit le champ électromagnétique d'une onde plane polarisée circulairement [35][36]. Des résultats intéressants ont été déduits d'une telle investigation. En particulier, la charge électrique a pu être caractérisée comme un générateur de

.../...

l'extension centrale du groupe d'invariance d'un champ électromagnétique uniforme et constant, ce qui conduit à l'additivité des charges et à une règle de supersélection pour la charge électrique, de la même façon que la règle de supersélection de Bargmann pour la masse galiléenne découle des propriétés du groupe de Galilée. De plus, l'analyse du sous-groupe de Poincaré qui laisse invariant une onde plane polarisée circulairement, a permis de mettre en évidence l'origine de la "masse effective" [15] d'un électron en interaction avec un faisceau laser, ce dernier étant considéré comme une onde plane polarisée circulairement.

D'un autre côté, la connaissance du groupe de symétrie d'un champ électromagnétique donné peut être utilisée pour construire le lagrangien, le plus général, d'une particule dans un tel champ électromagnétique [20] [44].

Ainsi, il apparaît prometteur, pour la résolution d'un grand nombre de problèmes, de connaître les champs électromagnétiques ayant une symétrie donnée [21]. Pour un tel but, il est utile de connaître parfaitement les sous-groupes du groupe de Poincaré.

L'étude des sous-groupes de Poincaré [10] peut apparaître, à première vue, comme une entreprise disproportionnée par rapport au but fixé. Néanmoins, l'investigation d'un grand nombre de ces sous-groupes est utile pour la résolution de problèmes se présentant dans l'étude des particules élémentaires. Par exemple :

i) trouver les représentations irréductibles du groupe de Poincaré dans une base "donnée". Un tel programme consiste à choisir une chaîne de sous-groupes et à diagonaliser les opérateurs invariants sous ces sous-groupes. Par exemple, dans ce qu'on appelle la "représentation canonique" [12] [26] [62] [67] obtenue

.../...

en premier par Wigner, le sous-groupe des translations joue un rôle particulier puisque les quadrimoments et une composante du spin (ce sont des opérateurs invariants sous les translations) sont simultanément diagonalisés. D'autres exemples sont fournis par l'étude des représentations données dans la base de Lorentz [19][4][53][60], dans la base du moment angulaire [46][51], dans la base L.S. [18], dans une base IS(2) [7][50]. On peut aussi rapprocher les travaux sur les représentations du groupe de Lorentz, utilisant différentes chaînes de sous-groupes, par exemple :

$$O(3,1) \supset O(3) \supset O(2) \quad [55] \quad , \quad O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(2) \quad [48],$$

$$O(3,1) \supset E(2) \quad [31] \quad \text{et} \quad O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(1,1) \quad [49][52][58].$$

ii) Plusieurs auteurs ont proposé de nouvelles équations d'onde pour les particules élémentaires, en remplaçant l'espace de Minowski, sur lequel les fonctions sont définies, par un autre espace homogène H du groupe de Poincaré. Deux tentatives ont été faites, dans l'une H est le groupe de Poincaré lui-même [47], dans l'autre H est de dimension 8 [6][8][39][59].

Dans ces modèles, une équation d'onde correspond à un ensemble de particules élémentaires (c'est-à-dire à une représentation réductible du groupe de Poincaré) conduisant de façon naturelle aux trajectoires de Regge comme dans [6], ou à de nouveaux nombres quantiques comme dans [39][59].

Il est bien connu que les espaces homogènes peuvent être mis en correspondance bijective avec les sous-groupes. Une classification de certains espaces homogènes (ceux qui "contiennent" l'espace de Minkowski et qui sont associés aux sous-groupes connexes de Poincaré) a été donnée dans [8], en

.../...

utilisant la classification des sous-groupes de Lorentz par D. Finkelstein [25] (*). Certains aspects de la théorie des champs sur des espaces homogènes ont été discutés par divers auteurs [27] [56].

iii) Nous noterons, aussi, un sous-groupe particulier de Poincaré, $IS(2)$, qui est le groupe du repère de moment infini. Ce groupe de dimension 8 contient un sous-groupe isomorphe au groupe de Galilée à deux dimensions. Cette structure non relativiste du groupe de Poincaré a été mise en évidence par Susskind [66] et a été largement exploitée ces dernières années [11] [63]. Des représentations irréductibles de $IS(2)$ ont été étudiées dans [50]. La réduction d'une représentation de masse non nulle, par rapport à ce sous-groupe est équivalente à une contraction "formelle" de la représentation canonique habituelle de Wigner [7].

(*) Cette classification des sous-groupes de Lorentz a été donnée indépendamment par Winternitz et Fris [69], Shaw [61]. Nous en donnerons une démonstration au chapitre III.

I - GENERALITES - NOTATIONS

La classification des sous groupes connexes du groupe de Poincaré P constitue une étape vers une connaissance complète des sous groupes de P . Sur ce sujet, on peut renvoyer le lecteur aux travaux de JOOS et SCHRADER [38], de JANNER et al [13] [36] [37], de DERZKO [22] et de LASSNER [42].

Classer tous les sous groupes connexes d'un groupe de Lie connexe donné G est équivalent à classer toutes les sous algèbres de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G . Cette propriété est la conséquence du théorème suivant :

Théorème

- i) Si H est un sous groupe de Lie de G , son algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est une sous algèbre de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G .
- ii) Chaque sous algèbre de $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie d'un et d'un seul sous groupe de Lie connexe de G .

(Pour la preuve, voir, par exemple, réf [30], page 102).

Nous nous intéressons aux classes de conjugaison des sous algèbres. Il est bien connu que la conjugaison est une relation d'équivalence, deux sous algèbres étant équivalentes si il existe une transformation de G qui applique l'une sur l'autre. Cependant, alors que toutes les sous-algèbres de $\mathcal{G}$ forment un treillis, les classes de conjugaison ne constituent pas en général un treillis, mais seulement un ensemble partiellement ordonné que nous noterons $\Pi(\mathcal{G})$.

.../...

Soit $\mathcal{H}$ une sous algèbre de $\mathcal{G}$. Il peut arriver que $\Pi(\mathcal{H})$ soit un sous ensemble de $\Pi(\mathcal{G})$ (c'est le cas lorsque tout couple de sous algèbres de $\mathcal{H}$ conjuguées dans G est aussi un couple de sous algèbres conjuguées dans H). Lorsque ceci se produit, l'ordre naturel (par inclusion) dans $\Pi(\mathcal{H})$ coïncide avec l'ordre hérité de $\Pi(\mathcal{G})$.

Dans le but d'obtenir $\Pi(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ étant l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, nous pouvons envisager diverses méthodes systématiques. Chacune d'elles a ses propres avantages mais nous ne sommes pas capables d'en trouver une qui ne soit pas fastidieuse. Heureusement, il est possible, avec l'aide de théorèmes simples, d'obtenir des informations sur les parties de $\Pi(\mathcal{P})$. Ces informations concernent :

- La partie de $\Pi(\mathcal{P})$ qui contient seulement les translations (tableau III-1).

- $\Pi(\mathcal{L})$ et $\Pi(E(3))$ (où $\mathcal{L}$ est $E(3)$ sont respectivement les algèbres de Lorentz et du groupe euclidien) qui sont des sous ensembles de $\Pi(\mathcal{P})$ (tableaux III-2 et III-5).

- $\Pi(E(2,1))$ (où $E(2,1)$ est le groupe de Poincaré à trois dimensions d'espace-temps) qui est "presque" contenu dans $\Pi(\mathcal{P})$ (tableau III-6).

- Le "sommet" de $\Pi(\mathcal{P})$, c'est-à-dire les sous algèbres maximales (tableau IV-1).

- Les sous algèbres de dimension 1 de $\Pi(\mathcal{P})$ (tableau V-1).

.../...

Dans le chapitre II, nous donnons des théorèmes utiles à la construction de $\Pi(\mathbf{P})$. D'autres théorèmes d'un intérêt plus général seront donnés dans les appendices A et B.

Les parties de $\Pi(\mathbf{P})$ énoncées précédemment sont données dans les chapitres III et IV. Dans le chapitre IV, nous donnons les stabilisateurs des sous groupes connexes de Lorentz, utiles pour la construction de $\Pi(\mathbf{P})$. Les sous groupes de dimension 1 sont traités dans le chapitre V, en utilisant une méthode développée au chapitre III pour les sous groupes de dimension 1 de Lorentz. Une interprétation physique de ces sous groupes est donnée en appendice C.

Le "corps" de $\Pi(\mathbf{P})$ est considéré dans les chapitres VI et VII. Dans le chapitre VIII, nous donnons un grand nombre de tableaux montrant la filiation des divers sous groupes.

Les notions de calcul tensoriel utilisé dans le chapitre VI sont données dans l'appendice D.

Le chapitre IX est consacré à l'application des résultats des chapitres précédents à la recherche des champs électromagnétiques ayant une symétrie donnée.

Nous complétons ces généralités en rappelant quelques propriétés du groupe de Poincaré et en précisant les notations utilisées.

a) Chaque élément du groupe de Poincaré (a, L) peut être écrit de façon unique comme une transformation de

.../...

Lorentz L suivie d'une translation a , avec la loi de multiplication

$$(a', L')(a, L) = (a' + L'a, L'L) \quad (I-1)$$

où

$$(L'a)^\mu = L'^\mu{}_\nu a^\nu$$

L'algèbre de Lie de $\mathcal{P}$ est engendrée par les générateurs $M^{\mu\nu}$, P^μ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) avec les relations de commutation.

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\lambda}] &= i(g^{\nu\rho} M^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda} M^{\mu\rho} - g^{\mu\rho} M^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} M^{\nu\rho}) \\ [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu) \end{aligned} \quad (I-2)$$

où $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, les autres composantes étant nulles.

Nous utiliserons souvent les notations :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \\ \vec{K} &= (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \end{aligned} \quad (I-3)$$

b) Comme il est bien connu, l'étude du groupe de Lorentz peut être remplacée par celle de son recouvrement, le groupe $SL(2, \mathbb{C})$. Nous définissons la matrice de Pauli 2×2

$$\sigma(x) = x^0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{x} \quad (I-4)$$

associée au quadrivecteur réel x . A chaque transformation L

.../...

correspond une matrice $\Lambda \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, définie à un signe près, telle que

$$\Lambda \sigma(x) \Lambda^+ = \sigma(Lx) \quad (\text{I-5})$$

Le couple $(\sigma(a), \Lambda)$ dénote l'élément le plus général de $\overline{\mathbf{P}}$, le recouvrement de Poincaré, dont la loi de groupe est :

$$(\sigma(a'), \Lambda')(\sigma(a), \Lambda) = (\sigma(a' + La), \Lambda' \Lambda) \quad (\text{I-6})$$

c) On sait que le groupe de Lorentz est isomorphe à $\text{SO}(3, \mathbb{C})$. Soit $\vec{F} = \vec{B} + i\vec{E}$ un trivecteur complexe. La matrice 2×2 $\vec{\sigma} \cdot \vec{F}$ est de trace nulle et son déterminant est $\vec{F}^2$. Tout élément $\Lambda \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ agit linéairement comme suit :

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{F} \longrightarrow \Lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{F}) \Lambda^+$$

laissant la trace et le déterminant invariants. Il est facile de voir que $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ est une représentation à deux valeurs de $\text{SO}(3, \mathbb{C})$ ce qui montre l'isomorphisme avec le groupe de Lorentz.

De façon plus précise, si $R \in \text{SO}(3, \mathbb{C})$

$$\Lambda(\vec{\sigma} \cdot \vec{F}) \Lambda^+ = \vec{\sigma} \cdot (R\vec{F}) \quad (\text{I-7})$$

Ces formules expriment l'action du groupe de Lorentz sur son algèbre de Lie à travers la convention :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (F^{01}, F^{02}, F^{03}) \\ \vec{B} &= (F^{23}, F^{31}, F^{12}) \end{aligned} \quad (\text{I-8})$$

.../...

qui établit la connection entre le vecteur $\vec{B} + i\vec{E}$ et l'élément $\frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$ de l'algèbre de Lie, où les $M_{\mu\nu}$ sont les générateurs usuels du groupe de Lorentz (chaque tenseur F de composantes $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ correspondant à un seul élément de l'algèbre de Lie).

En utilisant les notations (I-3) :

$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = \vec{B} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \vec{K} \quad (\text{I-9})$$

d) Nous donnons maintenant l'action du groupe de Poincaré sur son algèbre de Lie. Pour cela, définissons la représentation à deux valeurs, de dimension 4.

$$(a, L) \longrightarrow \pm \begin{pmatrix} \Lambda & -\frac{i}{2} \sigma(a) \Lambda^+ & -1 \\ 0 & \Lambda^+ & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-10})$$

On en déduit finalement l'action de P ou $(\bar{P})$ sur son algèbre de Lie

$$(a, L)(x, F)(a, L)^{-1} = (Lx + aF', F') \quad (\text{I-11})$$

avec

$F' = R\vec{F}$ (R est l'élément de $SO(3, \mathbb{C})$ associé à L suivant les relations (I-7), et $(aF')^\mu = a_\nu F'^{\nu\mu}$).

Il est utile de remarquer que l'action sur l'algèbre de Lie (représentation adjointe) est différente de celle sur son espace vectoriel dual (représentation coadjointe). Comme exemple, considérons l'action d'une translation a sur l'élément $(x, F) = x^\mu P_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$

.../...

$$\begin{cases} x \longrightarrow x + aF \\ F \longrightarrow F \end{cases} \quad (I-12)$$

$$\begin{aligned} (x, F) &\longrightarrow (x^\mu + a_\nu F^{\nu\mu}) P_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \\ &= x^\mu P_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (M_{\mu\nu} + a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu) \end{aligned}$$

On en déduit l'action sur les composantes d'un élément de l'espace dual :

$$\begin{cases} P_\mu \longrightarrow P_\mu \\ M_{\mu\nu} \longrightarrow M_{\mu\nu} + a_\mu P_\nu - a_\nu P_\mu \end{cases} \quad (I-13)$$

Dans la suite, nous utiliserons aussi bien la représentation adjointe que la représentation coadjointe.

II - SOUS-GROUPES CONNEXES D'UN GROUPE DE LIE INHOMOGENEa - Propriétés générales

Dans ce qui suit, nous appellerons groupe de Lie inhomogène tout produit semi-direct $P = T \ltimes L$, où T est un groupe abélien. Les éléments de P seront notés (a, L) avec la loi de groupe

$$(a', L')(a, L) = (a' + L'a, L'L) \quad (\text{II-1})$$

Par suite (*) les éléments $(0, L)$ forment le sous-groupe L de P et les éléments (a, l) forment le sous-groupe T de P . De la même façon, l'algèbre de Lie $\mathcal{P}$ de P sera notée par $\mathcal{P} = \mathcal{T} \ltimes \mathcal{L}$. Sous un automorphisme intérieur de P , $\mathcal{T}$ est inchangé et $\mathcal{L}$ devient $\mathcal{L}_1$. Ainsi $\mathcal{P}$ peut maintenant s'écrire $\mathcal{T} \ltimes \mathcal{L}_1$. D'autre part, tout automorphisme intérieur de P peut s'écrire comme le produit d'une transformation homogène (élément de L) par une translation (élément de T) ; par suite, toutes les formes $\mathcal{P} = \mathcal{T} \ltimes \mathcal{L}_1$ sont obtenues par action d'une translation. Il est clair que $\mathcal{P}$ considéré comme un espace vectoriel est la somme directe $\mathcal{T} + \mathcal{L}$ des espaces vectoriels $\mathcal{T}$ et $\mathcal{L}$. La structure inhomogène est exprimée par les relations

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, \mathcal{L}] &\subseteq \mathcal{L} \\ [\mathcal{L}, \mathcal{T}] &\subseteq \mathcal{T} \\ [\mathcal{T}, \mathcal{T}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

(Nous utiliserons les symboles $\subseteq$ et $\subset$ dans le but de distinguer l'inclusion au sens large et au sens strict).

(*) L ne doit pas être confondu avec le groupe quotient P/T , de même $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{P}/\mathcal{T}$

.../...

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre propre de $\mathcal{P}$, i.e

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P} \quad , \quad \mathcal{A} \neq 0 \quad (\text{II-3})$$

$$[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A}$$

Nous définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \mathcal{A} \cap \mathcal{L} \\ \mathcal{C}_A &= \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

Des relations (II-2) et (II-3) on déduit

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_A] &\subseteq \mathcal{L}_A \\ [\mathcal{L}_A, \mathcal{C}_A] &\subseteq \mathcal{C}_A \\ [\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_A] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-5})$$

ce qui montre, en particulier, que $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A$ est une sous-algèbre de Lie de

$$\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{A} \subset \mathcal{P} \quad (\text{II-6})$$

Nous adopterons la terminologie suivante : toute sous-algèbre de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A$ et ses conjuguées sont appelées symorphes. On peut montrer, sans difficulté, que toute sous-algèbre symorphe peut se mettre sous une forme manifestement symorphe (i.e. sous la forme $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A$) à l'aide d'une translation. Elle sera appelée symorphe propre si $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{L}_A$ sont simultanément différentes de zéro. Si $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A$, c'est une algèbre de translation, si $\mathcal{A} = \mathcal{L}_A$, c'est une algèbre homogène.

Supposons, maintenant, que $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A \subset \mathcal{A}$, et soit $\mathcal{M}_A$ un complémentaire de $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A$ dans $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A \quad (\text{II-7})$$

.../...

Il est clair que tout élément non nul m_i de $\mathcal{M}_A$ peut s'écrire comme une somme d'un élément t_i de $\mathcal{C}$ et un élément ℓ_i de $\mathcal{L}$

$$m_i = t_i + \ell_i \quad (\text{II-8})$$

Cette décomposition est unique et non triviale (c'est-à-dire t_i et ℓ_i ne peuvent être nuls). De plus, $t_i \notin \mathcal{C}_A$, $\ell_i \notin \mathcal{L}_A$. Nous notons par $\mathcal{C}'_A$ (resp. $\mathcal{L}'_A$) le sous-espace engendré par les t_i (resp. ℓ_i). On déduit alors les propriétés suivantes :

$$[\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A, \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A] \subseteq \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A \quad (\text{II-9})$$

$$[\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A, \mathcal{C}_A] \subseteq \mathcal{C}_A \quad (\text{II-10})$$

$$[\mathcal{L}_A, \mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A] \subseteq \mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A \quad (\text{II-11})$$

Ainsi $\mathcal{C}_A + (\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A)$ et $(\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A) + \mathcal{L}_A$ sont deux sous-algèbres symorphes de même dimension que $\mathcal{H}$, puisque

$$\dim \mathcal{C}'_A = \dim \mathcal{L}'_A = \dim \mathcal{M}_A \quad (\text{II-12})$$

et

$$\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}'_A = 0, \quad \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}'_A = 0 \quad (\text{II-13})$$

Par suite, il est toujours possible d'associer à chaque algèbre non-symorphe $\mathcal{H}$, deux algèbres symorphes de même dimension que $\mathcal{H}$. De façon plus précise, $\mathcal{C}_A \sqcup (\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A)$ sera appelée l-associée et $(\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A) \sqcup \mathcal{L}_A$ sera appelée t-associée.

Nous pouvons résumer la discussion précédente dans le théorème suivant.

.../...

Théorème (II-1)

Etant donnée une algèbre de Lie inhomogène $\mathcal{P} = \mathcal{C} \sqcup \mathcal{L}$, toute sous-algèbre $\mathcal{R}$ peut être écrite sous la forme $\mathcal{R} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$. Chaque vecteur non nul de $\mathcal{M}_A$, s'il en existe, peut être écrit, de façon unique, comme la somme d'un vecteur d'un sous-espace $\mathcal{L}'_A$ de $\mathcal{L}$ et d'un vecteur d'un sous-espace $\mathcal{C}'_A$ de $\mathcal{C}$. De plus, $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ et $\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A + \mathcal{L}_A$ sont des algèbres symorphes de même dimension que $\mathcal{R}$.

Nous pouvons, maintenant, établir les propriétés suivantes.

Théorème (II-2)

Les espaces quotients $\overline{\mathcal{L}'_A} = (\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A) / \mathcal{L}_A$ et $\overline{\mathcal{C}'_A} = (\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A) / \mathcal{C}_A$ sont des espaces de représentation pour la sous-algèbre $\mathcal{L}_A$. Ces deux représentations sont équivalentes.

On peut, d'abord, remarquer que $\overline{\mathcal{L}'_A}$ (resp. $\overline{\mathcal{C}'_A}$) peut être identifié, en tant qu'espace vectoriel, avec $\mathcal{L}'_A$ (resp. $\mathcal{C}'_A$). Maintenant, puisque $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ est une sous-algèbre, on a

$$[\mathcal{L}_A, \overline{\mathcal{L}'_A}] \subseteq \overline{\mathcal{L}'_A} \quad (\text{II-14})$$

de même, puisque $\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A$ est un sous-espace invariant sous $\mathcal{L}_A$

$$[\mathcal{L}_A, \overline{\mathcal{C}'_A}] \subseteq \overline{\mathcal{C}'_A} \quad (\text{II-15})$$

De plus, la propriété (II-8) nous dit qu'il existe une bijection linéaire de $\mathcal{M}_A$ sur $\mathcal{L}'_A$ et ^{une} de $\mathcal{M}_A$ sur $\mathcal{C}'_A$. Ces applications linéaires assurent l'équivalence des deux représentations de $\mathcal{L}_A$ définies par (II-14) et (II-15).

Théorème (II, 3)

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ une sous algèbre de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Y}_A$

l'ensemble défini par : $\mathcal{Y}_A = \{t \in \mathcal{C} \mid [\mathcal{L}_A, t] \subseteq \mathcal{C}_A\}$

i) Si $\mathcal{A}$ est symorphe, il existe $t_0 \in \mathcal{Y}_A$, $t_0 \notin \mathcal{C}_A$ tel que t_0 engendre une translation appliquant $\mathcal{A}$ sur l'algèbre manifestement symorphe. $\mathcal{C}_A + (\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A)$.

ii) Si $\mathcal{Y}_A = \mathcal{C}_A$, $\mathcal{A}$ est nonsymorphe.

Il est clair que $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{Y}_A$. Nous avons déjà remarqué que si l'algèbre $\mathcal{A}$ est symorphe, il existe une translation qui la transforme en une algèbre manifestement symorphe. Cette transformation peut être choisie dans $\mathcal{Y}_A$, la partie translation du stabilisateur de $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A$. Notons par e^{t_0} cette translation. L'élément $m = l' + t'$ de $\mathcal{M}_A$ est transformé comme suit :

$$e^{t_0} m e^{-t_0} = m - [l', t_0] = l' + t' - [l', t_0] \quad (\text{II}, 16)$$

Si $\mathcal{A}$ est symorphe, $t' - [l', t_0]$ doit appartenir à $\mathcal{C}_A$.

D'autre part, t_0 ne peut pas appartenir à $\mathcal{C}_A$ puisque, en accord avec (II, 10)

$$t_0 \in \mathcal{C}_A \implies [l', t_0] \in \mathcal{C}_A \implies t' - [l', t_0] \in \mathcal{C}_A$$

d'où le théorème énoncé ci-dessus.

Théorème (II, 4)

Si $\mathcal{L}$ est semi-simple, toute sous-algèbre de la forme $\mathcal{A} = \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ avec $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A = \mathcal{L}$ est conjugué de $\mathcal{L}$.

.../...

Soit σ l'isomorphisme entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ défini par

$$\begin{aligned}\sigma(l) &= l, & l \in \mathcal{L}_A \\ \sigma(l') &= l' + t', & l' \in \mathcal{L}_A \text{ et } l' + t' \in \mathcal{M}_A\end{aligned}\quad (\text{II-17})$$

σ peut être étendu à un automorphisme τ de $\mathcal{P}$ en définissant son action sur $\mathcal{E}$ par

$$\tau(t) = t, \quad t \in \mathcal{E} \quad (\text{II-18})$$

L'action de τ sur $\mathcal{L}$ peut s'écrire

$$\tau(l) = l + t(l), \quad l \in \mathcal{L}, \quad t(l) \in \mathcal{E} \quad (\text{II-19})$$

Soit l_1, l_2 deux éléments de $\mathcal{L}$; la relation

$$\tau([l_1, l_2]) = [\tau(l_1), \tau(l_2)] \quad (\text{II-20})$$

conduit à

$$t([l_1, l_2]) = [l_1, t(l_2)] - [l_2, t(l_1)] \quad (\text{II-21})$$

Cette relation est l'équation d'un 1-cocycle. Comme $\mathcal{A}$ est semi-simple tout 1-cocycle est un 1-cobord. Par suite, il existe $t_\tau \in \mathcal{E}$ tel que

$$t(l) = [l, t_\tau], \quad l \in \mathcal{L} \quad (\text{II-22})$$

d'où

$$\tau(l) = l + [l, t_\tau] \quad (\text{II-23})$$

La dernière relation, ajoutée au fait que τ agit identiquement sur $\mathcal{E}$, montre que τ est une translation.

b - Sous-groupes connexes maximaux

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de déterminer toutes les sous-algèbres maximales de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire toutes les algèbres $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$ telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$

$$1) \mathcal{L}_A = \mathcal{L}$$

Il s'ensuit que $\mathcal{L}'_A = 0$ et $m_A = 0$. $\mathcal{H}$ est une algèbre symorphe. La condition de maximalité pour $\mathcal{H}$ implique que

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_A \quad (\text{II-24})$$

avec $\mathcal{L}_A$ maximale dans $\mathcal{L}$. Si l'on désire trouver $\mathcal{H}$ à une conjugaison près, il est clair que $\mathcal{L}_A$ doit être choisi à une conjugaison de L près, à cause de la structure de produit semi-direct.

$$2) \mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}$$

Dans ce cas, $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A = \mathcal{L}$. En effet, $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A \subset \mathcal{L}$ impliquerait

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A + \mathcal{L} \subset \mathcal{P} \quad (\text{II-25})$$

et $\mathcal{H}$ ne serait pas maximale.

Par le même type de discussion et en utilisant la propriété (II-10), $\mathcal{L}_A$ doit être un sous-espace invariant maximal sous $\mathcal{L}$, c'est-à-dire un idéal maximal dans $\mathcal{P}$.

Dans le cas $\mathcal{L}'_A = 0$, nous avons $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}$, et tout sous-espace invariant maximal $\mathcal{L}_A$ sous $\mathcal{L}$ fournit une sous-algèbre symorphe maximale.

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L} \quad (\text{II-26})$$

Si nous choisissons $\mathcal{L}_A$ à une conjugaison de L près, nous obtenons $\mathcal{H}$ à une conjugaison de P près. Ces propriétés peuvent être résumées dans le théorème suivant.

.../...

Théorème (II-5)

Si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre maximale de $\mathcal{P}$, elle est d'un des trois types suivants :

a) $\mathcal{H} = \mathcal{C} + \mathcal{L}_A$ ($\mathcal{H}$ symorphe), avec $\mathcal{L}_A$ sous-algèbre maximale dans $\mathcal{L}$

b) $\mathcal{H} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}$ ($\mathcal{H}$ symorphe), avec $\mathcal{C}_A$ sous-espace invariant maximal sous $\mathcal{L}$

c) $\mathcal{H} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ ($\mathcal{H}$ non-symorphe) avec les propriétés

i) $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A = \mathcal{L}$

ii) $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace invariant maximal sous $\mathcal{L}$

iii) $\mathcal{C}_A + \mathcal{C}'_A$ est un sous-espace invariant sous $\mathcal{L}_A$

Remarque : Les propriétés i) et ii) signifient que l'algèbre $\mathcal{L}$ -associée à $\mathcal{H}$ est maximale.

Dans le cas où $\mathcal{L}$ agit irréductiblement sur $\mathcal{C}$ le théorème précédent peut s'exprimer sous la forme

Théorème (II-6)

Si $\mathcal{L}$ agit irréductiblement sur $\mathcal{C}$, une sous-algèbre maximale $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ a une des formes suivantes :

a) $\mathcal{H} = \mathcal{C} + \mathcal{L}_A$, avec $\mathcal{L}_A$ sous-algèbre maximale de $\mathcal{L}$

b) $\mathcal{H} = \mathcal{L}$

c) $\mathcal{H} = \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$, avec $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A = \mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{L}$

En combinant ce dernier théorème avec le théorème (II-4), nous obtenons

.../...

Théorème (II-7)

Si L est semi-simple et agit irréductiblement sur $\mathcal{C}$,
toute sous-algèbre maximale de $\mathcal{P}$ est symorphe*.

Nous pouvons en déduire le théorème suivant :

Théorème (II-8)

Si L est de dimension 1 et agit irréductiblement sur $\mathcal{C}$,
les seules sous-algèbres maximales de $\mathcal{P}$ sont $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}$.

c - Cas particulier d'un produit direct

Un cas particulier de groupe de Lie inhomogène est celui où le produit semi-direct est réduit au produit direct $T \times L$. Les relations (II-2) deviennent

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}, \mathcal{L}] &\subseteq \mathcal{L} \\ [\mathcal{L}, \mathcal{C}] &= 0 \\ [\mathcal{C}, \mathcal{C}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II-27})$$

Les résultats précédents peuvent encore être utilisés pour classer les sous-algèbres maximales de $\mathcal{P}$. Cependant, quelques informations supplémentaires peuvent être obtenues dans le cas d'un produit direct.

Remarquons, d'abord, que si $\dim \mathcal{C} > 1$, l'ensemble des sous-espaces invariants maximaux de $\mathcal{C}$ par action de $\mathcal{L}$ est l'ensemble des hypersurfaces $\mathcal{C}_A$ de $\mathcal{C}$ (définies par $\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C} - 1$). De la relation (II-16) tous sous-espace $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}$, où $\mathcal{C}_A$ est un hyperplan donné, fournit

* En fait, on peut démontrer [64] que les sous-algèbres maximales d'une algèbre de Lie quelconque $R \oplus L$ où R est la partie résoluble, est symorphe.

une sous-algèbre maximale. A deux hyperplans distincts correspond deux algèbres non conjuguées.

De plus, pour une sous-algèbre maximale non symorphe $\mathcal{A} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$, un élément non nul de $\mathcal{L}'_A$ ne peut pas appartenir à l'algèbre donnée $\mathcal{L}' = [\mathcal{L}, \mathcal{L}]$, car $\mathcal{L}'$ est aussi égale à $[\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A, \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A]$. On en déduit

i) Si $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, toute algèbre maximale est symorphe.

ii) Si $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$, $\mathcal{M}_A$ est nécessairement de dimension 1 et est engendrée par un élément $\ell_0 + t_0$ avec $\ell_0 \in \mathcal{L} - \mathcal{L}'$ et $t_0 \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C}_A + [t_0] = \mathcal{C}$ ($[t_0]$ est l'espace vectoriel unidimensionnel engendré par t_0). Il en découle que $\dim \mathcal{L}_A = \dim \mathcal{L} - 1$.

Deux cas triviaux sont ceux correspondant à $\dim \mathcal{C} = 1$ ou $\dim \mathcal{L} = 1$.

a) Si $\dim \mathcal{C} = 1$ (et $\dim \mathcal{L} > 1$), les sous-algèbres maximales sont :

- i) $\mathcal{L}$
- ii) $\mathcal{C} + \mathcal{L}_A$, avec $\mathcal{L}_A$ maximale dans $\mathcal{L}$.
- iii) $\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ quand $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$, avec $\mathcal{M}_A = [\ell_0 + t]$, $\ell_0 \in \mathcal{L} - \mathcal{L}'$, $[t] = \mathcal{C}$ et $\dim \mathcal{L}_A = \dim \mathcal{L} - 1$.

b) Si $\dim \mathcal{L} = 1$ (et $\dim \mathcal{C} > 1$), les sous-algèbres maximales sont :

- i) $\mathcal{C}$
- ii) $\mathcal{C}_A + \mathcal{L}$, avec $\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C} - 1$.
- iii) $\mathcal{C}_A + \mathcal{M}_A$, avec $\mathcal{M}_A = [\ell + t_0]$ avec $[\ell] = \mathcal{L}$, et $\mathcal{C}_A + [t_0] = \mathcal{C}$.

.../...

Nous pouvons ajouter au § b le théorème suivant :

Théorème (II-9)

Si $[\mathcal{L}, \mathcal{C}] = 0$, toute sous-algèbre maximale $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ peut se mettre dans un des trois types suivants :

a) $\mathcal{H} = \mathcal{C} + \mathcal{L}_A$, avec $\mathcal{L}_A$ maximale dans $\mathcal{L}$.

b) $\mathcal{H} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}$, avec $\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C} - 1$.

c) $\mathcal{H} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ (seulement si $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \neq \mathcal{L}$) et

i) $\dim \mathcal{C}_A = \dim \mathcal{C} - 1$

ii) $\dim \mathcal{L}_A = \dim \mathcal{L} - 1$.

Les théorèmes ci-dessus seront utilisés dans les paragraphes suivants pour construire $\Pi(\mathcal{P})$. Nous indiquons brièvement quelques idées sur la façon de les utiliser. Nous pouvons constater qu'il sera nécessaire de connaître $\Pi(\mathcal{L})$ et l'action de chaque sous-groupe de Lorentz sur l'espace-temps. Cette étude sera faite au prochain chapitre. Le fait que le groupe de Lorentz soit simple permet d'utiliser le théorème (II-3) et les théorèmes donnés dans les appendices A et B.

Les sous-algèbres maximales de $\mathcal{P}$, $E(3)$, $E(2,1)$ sont facilement obtenues à l'aide des théorèmes (II-5, 6, 7). Toutes sont symorphes. De plus, les mêmes théorèmes sont utilisables pour les sous-algèbres maximales de ces sous-algèbres maximales.

Les algèbres symorphes sont facilement déduites des résultats du chapitre III. A tout couple d'algèbres symorphes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de même dimension satisfaisant à

$$\mathcal{L}_A \subset \mathcal{L}_B \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}_A \quad (\text{II-28})$$

.../...

on peut associer une sous-algèbre non symorphe, à condition que le théorème (II-2) soit satisfait.

Nous devons vérifier que les sous-algèbres obtenues de cette façon ne sont pas conjuguées d'une algèbre symorphe. Cette vérification s'effectue à l'aide du théorème (II-3).

III - LES SOUS-GROUPES CONNEXES DE $T(4)$, $L(3,1)$, $E(3)$, $E(2,1)$

a) Propriétés générales de ces sous-groupes

L'utilisation des théorèmes du chapitre II, pour obtenir l'ensemble $\Pi(P)$ d'un groupe de Lie inhomogène $P = T \sqcup L$ nécessite la connaissance des sous-groupes de T et L . Ces sous-groupes possèdent les propriétés intéressantes suivantes :

Théorème (III,1)

- i) Deux éléments de T sont conjugués dans P si et seulement si ils le sont sous une transformation homogène.
- ii) Deux éléments de L sont conjugués sous une transformation de P si et seulement si ils le sont sous une transformation de L .

Ce théorème est une conséquence directe de la loi de multiplication (I-1).

Corollaire (III,1)

L'ensemble $\Pi(L)$ est un sous ensemble de $\Pi(P)$.

Ce résultat est aussi valable pour les algèbres de Lie $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$. C'est-à-dire que $\Pi(\mathcal{L})$ est un sous ensemble de $\Pi(\mathcal{P})$.

Nous nous intéressons dans ce travail au groupe de Poincaré P . Il est clair que les sous-groupes des translations et de Lorentz jouent le rôle de T et L dans le théorème ci-dessus. D'autre part, parmi les sous-groupes du groupe de Poincaré, le groupe euclidien $E(3) = T^-(3) \sqcup SO(3)$ joue un rôle important en physique.

.../...

De plus, ce groupe, comme le groupe de Lorentz, a la propriété que deux sous-groupes de $E(3)$ sont conjugués dans $E(3)$ si et seulement si ils sont conjugués dans Poincaré. Par contre, cette propriété n'est plus valable dans le cas du groupe pseudo-euclidien* $E(2,1) = T^+(3) \sqcup L(2,1)$, engendré par $P_t, P_x, P_y, J_z, K_x, K_y$. En fait, nous dirons qu'elle est "presque" vraie, dans le sens que le groupe** $\hat{E}(2,1)$, sous-groupe de Poincaré dont la composante connexe est $E(2,1)$, possède cette propriété.

Nous résumons ces propriétés dans le théorème :

Théorème (III,2)

Deux éléments de $E(3)$ (resp. $\hat{E}(2,1)$) sont conjugués dans P si et seulement si ils sont conjugués dans $E(3)$ (resp. dans $\hat{E}(2,1)$).

Corollaire (III,2)

Les ensembles $\Pi(E(3))$ et $\Pi(\hat{E}(2,1))$ sont des sous ensembles de $\Pi(P)$.

Le théorème (III,2) est une conséquence des lemmes (III,1) et (III,2).

* Nous utilisons la notation $L(p,q)$ pour désigner la partie connexe de $SO(p,q)$.

** $\hat{E}(2,1)$ est isomorphe à $T^+(3) \sqcup SO(2,1)$, c'est un groupe à deux nappes, un des éléments étant la rotation d'angle π autour de l'axe des y .

Lemme (III,1)

Deux matrices unitaires $n \times n$, U_1 et U_2 qui sont conjuguées sous une transformation linéaire non singulière Λ sont conjuguées sous l'argument unitaire de Λ .

La démonstration de ce lemme est basée sur la décomposition polaire [31] d'une matrice non singulière .

$$\Lambda = U H = H' U \quad (\text{III-1})$$

qui est unique si H et H' sont hermitiennes positives et U est unitaire (l'argument unitaire de Λ). On a

$$\Lambda^+ \Lambda = H^2, \quad \Lambda \Lambda^+ = H'^2 \quad (\text{III-2})$$

Soit U_1 et U_2 deux matrices unitaires conjuguées par une matrice non singulière Λ . Alors $\Lambda U_1 \Lambda^{-1}$ est unitaire, on peut écrire

$$U_1^+ \Lambda^+ \Lambda U_1 = \Lambda^+ \Lambda \quad (\text{III,3})$$

ou, à l'aide de (III,2)

$$U_1^+ H^2 U_1 = H^2 \quad (\text{III,4})$$

Maintenant, le produit HU_1 peut s'écrire sous la forme $U_1 H_1$, ainsi (III,4) devient

$$(U_1^+ H)(H U_1) = H_1 U_1^+ U_1 H_1 = H_1^2 = H^2 \quad (\text{III,5})$$

Comme H (resp. H_1) est la racine carrée positive de H^2 (resp. H_1^2), on obtient :

.../...

$$H_1 = H \quad \text{et} \quad H U_1 = U_1 H \quad (\text{III},6)$$

par suite,

$$U_2 = \Lambda U_1 \Lambda^{-1} = U H U_1 H^{-1} U^{-1} = U U_1 U^{-1} \quad (\text{III},7)$$

ce qui prouve le lemme (III,1).

De ce lemme, il découle que deux rotations sont conjuguées sous une transformation de Lorentz si et seulement si elles sont conjuguées sous une rotation. A cause de l'unicité de l'argument unitaire dans la décomposition polaire, la rotation associée à une transformation de Lorentz est unique.

Pour démontrer le théorème (III,2) dans le cas de $E(3)$, considérons $(\vec{a}_1, R_1)$ et $(\vec{a}_2, R_2)$, deux transformations euclidiennes conjuguées sous la transformation de Poincaré (a, L) ,

$$\begin{aligned} (\vec{a}_2, R_2) &= (a, L) (\vec{a}_1, R) (a, L)^{-1} \\ &= (a + L \vec{a}_1 - L R_1 L^{-1} a, L R_1 L^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{III},8)$$

d'après les résultats précédents, L peut s'écrire comme le produit rotation-transformation de Lorentz pure ou transformation de Lorentz pure-rotation.

$$L = RB = B'R \quad (\text{III},9)$$

avec B commutant avec R_1 . Ainsi

$$(\vec{a}_2, R_2) = (a + RB \vec{a}_1 - R R_1 R^{-1} a, R R_1 R^{-1}) \quad (\text{III}-10)$$

.../...

La composante temporelle de a_2 doit être nulle, ce qui implique, puisque la composante temporelle de $a - R R_1 R^{-1} a$ est nulle, que la transformation de Lorentz pure B appartient au stabilisateur du vecteur a . Il s'en suit que

$$(\vec{a}_2, R_2) = (\vec{a}, R) (\vec{a}_1, R_1) (\vec{a}, R)^{-1} \quad (\text{III}, 11)$$

où $\vec{a}$ est la partie spatiale du quadrivecteur a , ce qui démontre le théorème (III,2) dans le cas de $E(3)$.

On démontre la partie du théorème (III,2) relative à $\hat{E}(2,1)$ d'une façon analogue. Cette démonstration nécessite une contrepartie de la décomposition polaire où unitarité et hermiticité sont remplacées respectivement par pseudo-unitaire et pseudo-hermiticité. Dans le cas des matrices 2×2 , une telle décomposition est facilement mise en évidence.

Soit $\hat{S}\hat{U}(1,1)$ le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{C})$ dont les éléments $\hat{U}$ satisfont

$$\hat{U} g \hat{U}^+ = \varepsilon g \quad (\text{III}, 12)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et g est la matrice

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III}, 13)$$

C'est le groupe qui laisse invariant la direction z de l'espace-temps. Tout élément $\hat{U}$ est de la forme :

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ \varepsilon \bar{b} & \varepsilon \bar{a} \end{pmatrix} \quad (\text{III}, 14)$$

.../...

avec $|a|^2 - |b|^2 = \varepsilon$. Il en découle que $\hat{U}$ est, soit un élément de $SU(1,1)$, soit le produit de $i\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ par un élément de $SU(1,1)$. A cause de la connexité de $SU(1,1)$, il est clair que $S\hat{U}(1,1)$ est à deux nappes. La matrice $i\sigma_2$ correspond à une rotation d'angle π autour de l'axe des y . L'espace quotient $SL(2, \mathbb{C})/S\hat{U}(1,1)$ est isomorphe à un hyperboloïde de masse imaginaire où deux points symétriques par rapport à l'axe des y doivent être identifiés.

Par un calcul matriciel simple, on peut montrer le lemme suivant :

Lemme (III,2)

Tout élément Λ de $SL(2, \mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda = \hat{U} H$$

où $\hat{U} \in S\hat{U}(1,1)$ et H est pseudo-hermitien, i.e

$$Hg = gH^+$$

En général, cette décomposition n'est pas unique.

.../...

b) Sous-groupes connexes de $T(4)$

La partie de $T(3)$ qui contient seulement des translations est facilement obtenue, nous la donnons dans le tableau (III, 1)

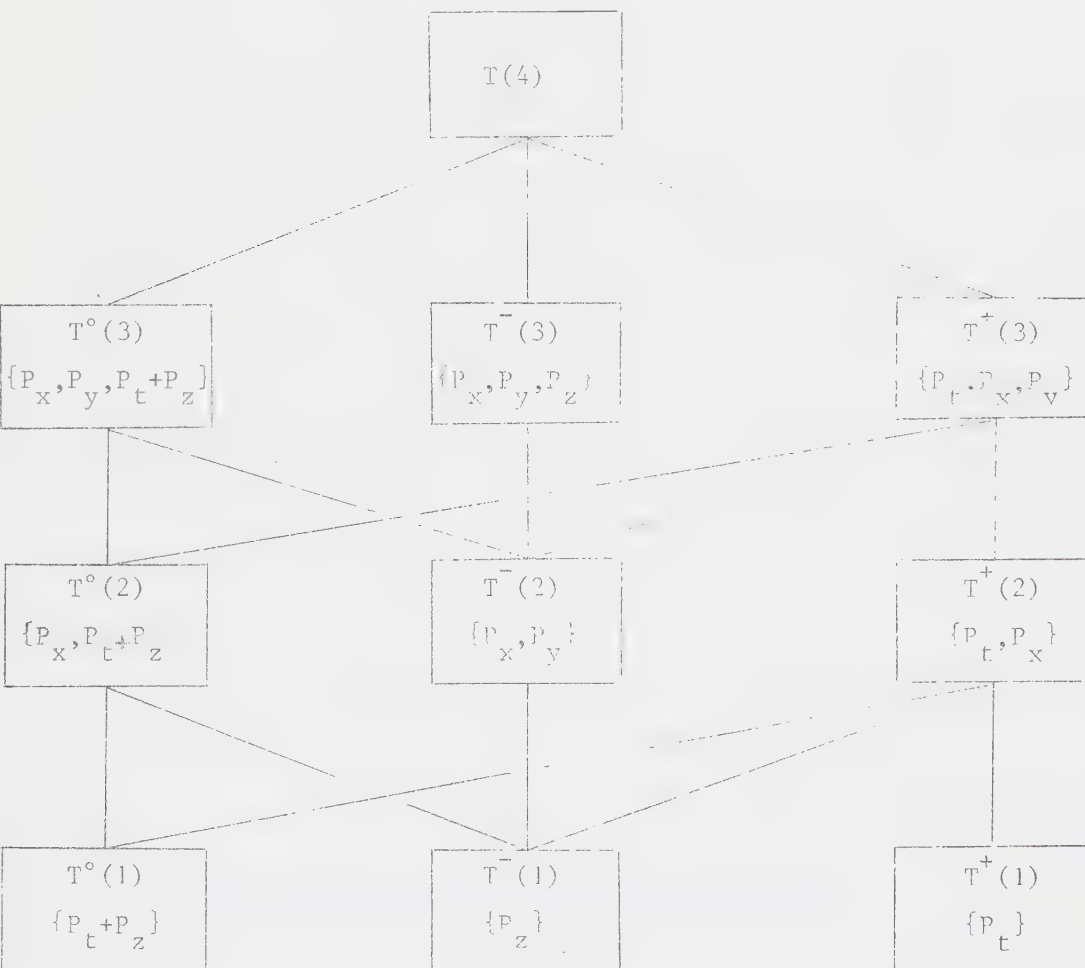


Tableau (III, 1) : sous-groupes connexes de $T(4)$

Les symboles $+$, $-$, 0 , caractérisent le type des sous espaces à une, deux ou trois dimensions. Le subscript 0 correspond à un espace tangent au cône de lumière, le subscript $+$ est utilisé pour rappeler que le sous espace contient une direction du genre lumière et le signe $-$ est associé à un sous espace du genre espace.

.../...

c) Sous-groupes connexes de $\mathbb{L}$

Dans ce paragraphe, nous étudierons les sous-groupes connexes de Lorentz (tableau III-2). De plus, nous donnerons les stabilisateurs de ces sous-groupes dans le tableau (III-3). Dans le tableau (III-4), nous donnerons les sous-groupes de $T(4)$ invariants sous Lorentz, ces renseignements étant d'une grande utilité dans la détermination des sous-groupes connexes de Poincaré.

 α) Sous-algèbres de dimension 1

Considérons d'abord la détermination des classes d'algèbres de Lie de dimension 1. Pour cela, nous pouvons remarquer que tout élément non nul s de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G , engendre un sous-groupe connexe de dimension 1. Deux éléments, non nuls, s et s' de $\mathcal{G}$ engendrent le même sous-groupe si et seulement si ils sont colinéaires, c'est-à-dire, appartiennent au même rayon. Ainsi, nous devons considérer l'action du groupe G sur l'espace projectif $\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$. Chercher les sous algèbres de dimension 1 de $\mathcal{G}$, à une conjugaison près, est équivalent à chercher les orbites de G dans $\mathcal{G}$.

Nous devons donc nous intéresser aux orbites de $\mathbb{L}$ dans l'espace projectif $\hat{\mathcal{L}}$ des tenseurs anti-symétriques F de rang 2.

Nous définissons les deux invariants (voir appendice D)

$$\begin{aligned}\Delta(F) &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \\ \Phi(F) &= \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = 2 \vec{E} \cdot \vec{B}\end{aligned}\tag{III,15}$$

reliés à la longueur de $\vec{F} = \vec{B} + i\vec{E}$ par

$$\vec{F}^2 = \Delta(F) + i \Phi(F)\tag{III-16}$$

.../...

L'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur cette algèbre étant donnée par

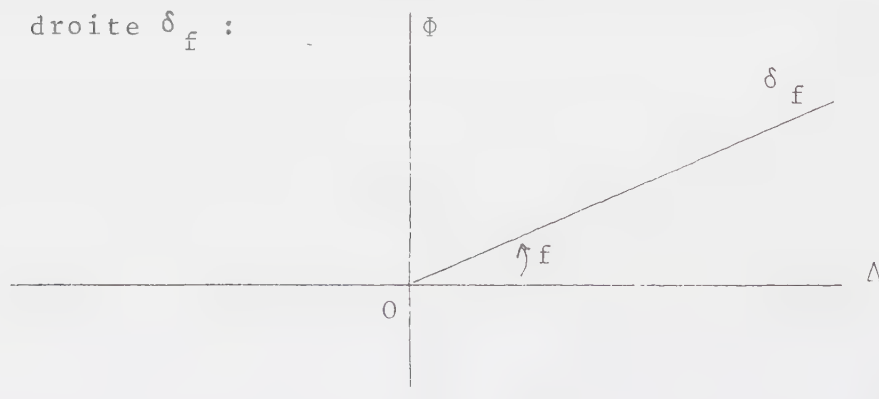
$$\vec{\sigma} \cdot \vec{F}' = \Lambda (\vec{\sigma} \cdot \vec{F}) \Lambda^{-1} \quad (\text{III-17})$$

Par une transformation de $SL(2, \mathbb{C})$ convenablement choisie, il est toujours possible d'appliquer $\vec{\sigma} \cdot \vec{F}$ sur une matrice diagonale ou sur une matrice de JORDAN $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ [41]. Au cours d'une telle transformation, la trace et le déterminant sont conservés.

Les matrices finales sont respectivement de la forme $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ avec $-\lambda^2 = \Delta + i\Phi$. De plus (*), les orbites dans $\mathcal{L}$ sont en correspondance bijective avec les points du plan (Δ, Φ) (sauf pour le vecteur nul de $\mathcal{L}$ qui constitue une orbite). En fait, ce qui nous intéresse ce sont les orbites dans $\hat{\mathcal{L}}$, l'espace des rayons associé à $\mathcal{L}$. Il est clair que si $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ appartiennent au même rayon, leurs longueurs au carré ont un rapport réel ou sont toutes les deux nulles. Par suite, les orbites dans $\hat{\mathcal{L}}$ sont décrites dans le plan (Δ, Φ) de la façon suivante :

i) une orbite est caractérisée par $\Delta = \Phi = 0$

ii) les autres orbites sont représentées par la demi-droite δ_f :



(*) on peut remarquer que $SL(2, \mathbb{C})$ admet comme orbite dans $\mathbb{C}^3 - \{0\}$ la sphère complexe $\vec{F}^2 = C^{te}$.

repérée par l'angle f où $0 \leq f < 2\pi$ et

$$\operatorname{tg} f = \frac{2\vec{E} \cdot \vec{B}}{\vec{B}^2 - \vec{E}^2} \quad (\text{III-18})$$

En utilisant la notation (1-9), des exemples typiques de générateurs d'algèbres de Lie non-conjuguées sont donnés par

$$\begin{cases} A_y = K_y + J_x & (\text{point } 0 \text{ de la figure}) \\ J_f = \cos f/2 J_z - \sin f/2 K_z & (\text{demi-droite } \delta_f) \end{cases} \quad (\text{III-19})$$

Il apparaîtra par la suite que les valeurs $f = 0$ et π jouent un rôle particulier. Nous distinguerons les 4 types de sous-groupes connexes de dimension 1 :

$$\boxed{SO(2)} \quad \boxed{L(1,1)} \quad \boxed{A(1)} \quad \boxed{F_f}$$

engendrés par J_z, K_z, A_x, J_f , respectivement, où l'angle f est tel que $\sin f \neq 0$. Les trois premiers types correspondent au cas $\Phi(F) = 0$ (i.e. $\det(F_{\mu\nu}) = |\Phi(F)|^2 = 0$) et $\Delta(F)$ respectivement positif, négatif, ou nul, chacun d'eux représentant une seule classe de conjugaison. Nous avons mis dans une case différente les groupes de Finkelstein F_f parce que chaque valeur de f correspond à une classe.

$\beta)$ Sous-groupe connexe maximal de L

DYNKIN [17] a donné d'importants théorèmes sur les sous-groupes connexes maximaux des groupes de Lie complexes simples. De ces théorèmes, on déduit que les sous-groupes connexes maximaux de $SL(2, \mathbb{C})$ sont d'un des deux types suivants :

i) Le sous-groupe des matrices de $SL(2, \mathbb{C})$ qui laissent invariant un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{C}^2$, c'est le

.../...

groupe des matrices :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \quad (\text{III-20})$$

Ce groupe est de dimension 4 et sera noté $S(2)$ à cause de l'isomorphisme avec le groupe de similitude à deux dimensions.

ii) Les formes réelles de $SL(2, \mathbb{C})$. Ces dernières ont été classées par E. CARTAN [17]. Ce sont $SU(2)$ et $SU(1,1)$ (isomorphisme à $SL(2, \mathbb{R})$) ; ces deux formes réelles sont simples.

Le théorème de BOREL-MOROZOV [14] assure l'existence, dans une algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}$, d'une sous-algèbre résoluble maximale $\mathfrak{B}$, qui est appelée algèbre de Borel. Cette sous-algèbre est unique à une conjugaison près. De plus, toute sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$ est conjuguée d'une sous-algèbre de $\mathfrak{B}$.

Il découle immédiatement que l'algèbre de Borel $S(2)$ de $\mathcal{L}$ contient toutes les sous-algèbres résolubles de $\mathcal{L}$ et que toute sous-algèbre de $S(2)$ est résoluble.

En remarquant que les sous-algèbres de $SU(2)$ et $SU(1,1)$ sont nécessairement de dimension inférieure à 3 et, par suite, résolubles, il est clair que toute sous-algèbre de $SL(2, \mathbb{C})$, sauf $SU(2)$ et $SU(1,1)$, est sous-algèbre de $S(2)$.

γ) Sous-groupes connexes de $S(2)$

On peut montrer que deux sous-groupes de $S(2)$ qui sont conjugués sous une transformation de Lorentz sont conjugués

.../...

sous une transformation de $S(2)$. Ceci ne signifie pas que cette propriété de conjugaison soit vraie pour les éléments eux-mêmes, mais il est facile de montrer que si $S_1, S_2 \in S(2)$ sont conjugués sous Lorentz, soit (S_1, S_2) soit (S_1, S_2^{-1}) sont conjugués sous $S(2)$. Par suite, $\Pi(S(2))$ est un sous-ensemble de $\Pi(\mathcal{L})$.

Remarquons maintenant que $S(2)$ est un groupe inhomogène, produit semi-direct du groupe $A(2)$ engendré par A_x et A_y (appelé groupe horosphérique [28]) par le groupe $SO(2) \times L(1,1)$ engendré par J_z, K_z . Par rapport à cette structure, on peut classer ces sous-groupes en symorphes et non symorphes (il est clair que ces sous-groupes sont symorphes par rapport au groupe de Poincaré).

En utilisant le théorème (II-6), et la classification à une conjugaison près des sous-algèbres de dimension 1 de Lorentz, on obtient que les sous-groupes connexes maximaux de $S(2)$ sont : $L_E(2) = A(2) \sqcup SO(2)$ (isomorphe au groupe euclidien à deux dimensions) engendré par A_x, A_y, J_z .

$Th(2) = A(2) \sqcup L(1,1)$ (isomorphe au groupe de Thales) engendré par A_x, A_y, K_z .

$S_f(2) = A(2) \sqcup F_f$, engendré par A_x, A_y, F_f
 $SO(2) \times L(1,1)$

Le théorème (II-2) nous assure, à cause de l'action de $SO(2) \times L(1,1)$ sur $A(2)$, qu'il n'y a pas de sous-algèbre maximale non symorphe.

Le théorème (II-8) nous permet de déterminer les sous-algèbres maximales des sous-algèbres ci-dessus ; nous obtenons :

.../...

sous-algèbres maximales de $L_E(2)$: $SO(2)$ et $A(2)$

$Th(2)$: $S(1)$ et $A(2)$

$S_f(2)$: F_f et $A(2)$

$SO(2) \times L(1,1)$: $SO(2)$, $L(1,1)$ et F_f

Toutes ces algèbres sont symorphes.

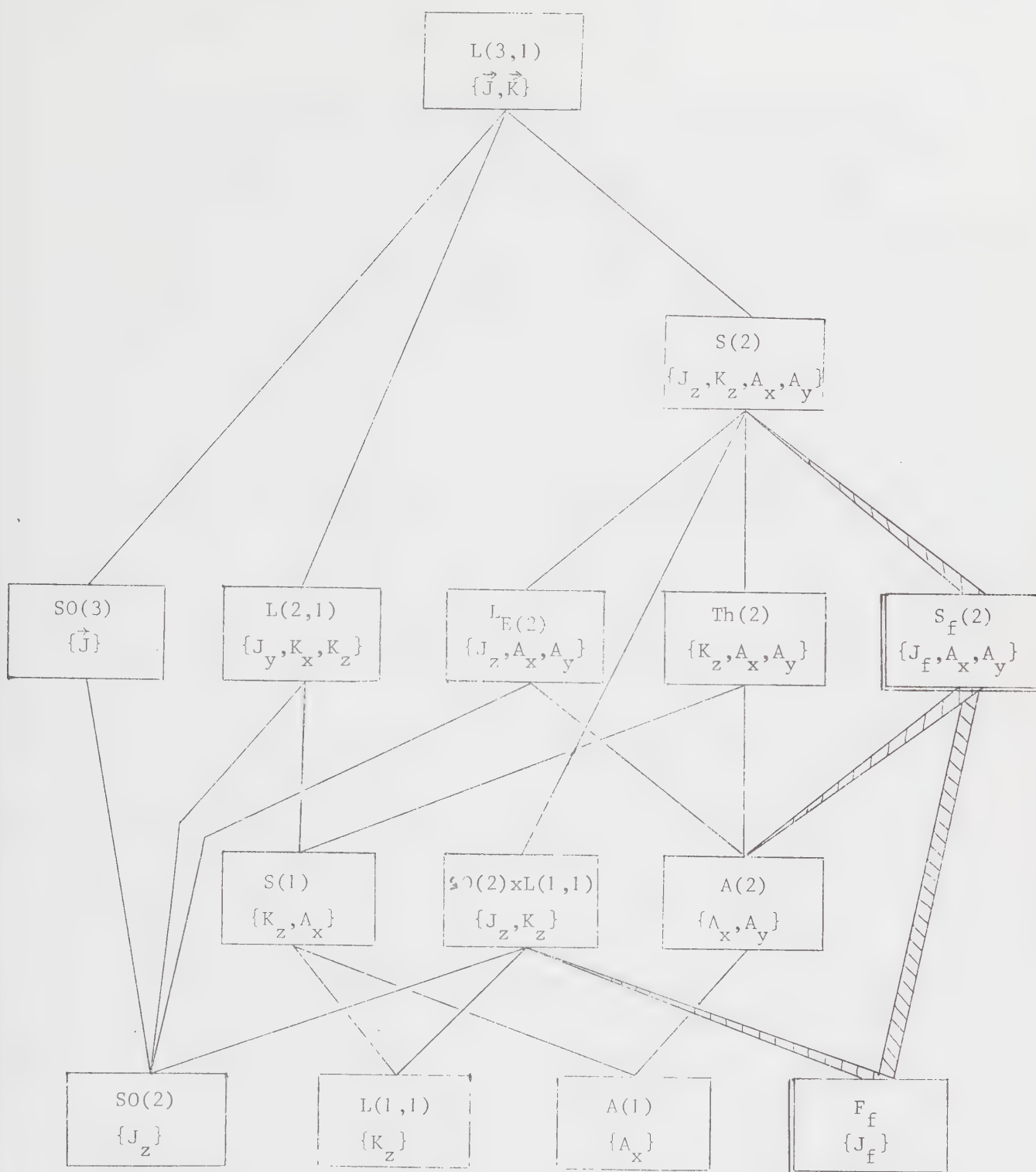


Tableau (III-2)

Sous-groupes connexes du groupe de Lorentz $L(3,1)$

.../...

d) Stabilisateurs des sous-groupes connexes du groupe de Lorentz

Dans ce paragraphe, nous étudions les stabilisateurs des sous-groupes connexes du groupe de Lorentz qui nous seront utiles par la suite pour la détermination de $\Pi(P)$.

La recherche des stabilisateurs sera simplifiée par la proposition suivante :

Proposition :

Soit $\mathcal{L}_B$ une sous algèbre de $\mathcal{L}$. Le sous-groupe de $P = T + L$ qui stabilise $\mathcal{L}_B$ a une algèbre de Lie symorphe.

En effet, supposons que l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ du stabilisateur est nonsymorphe. On a

$$[\mathcal{L}_B, \mathcal{A}] = [\mathcal{L}_B, \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A] \subset \mathcal{L}_B \text{ avec } \mathcal{M}_A \neq 0$$

(III-21)

ce qui implique

$$[\mathcal{L}_B, \mathcal{M}_A] \cap \mathcal{C} = [\mathcal{L}_B, \mathcal{C}'_A] = 0$$

(III-22)

ainsi $\mathcal{C}'_A$ doit appartenir à $\mathcal{A}$, en contradiction avec le caractère nonsymorphe de $\mathcal{A}$.

De plus, (III-21) implique

$$\mathcal{L}_B \subset \mathcal{L}_A$$

(III-23)

et

$$[\mathcal{L}_B, \mathcal{C}_A] = 0$$

(III-24)

.../...

La proposition ci-dessus, ainsi que les relations (III-23) et (III-24) sont utilisées pour la détermination des stabilisateurs des sous algèbres de Lorentz.

De façon plus précise, l'équation (I-5) permet de déterminer le stabilisateur dans le groupe de Lorentz, et l'équation (III-24) la partie translation. Les résultats sont rassemblés dans le tableau (III-3).

Comme exemple d'utilisation de l'équation (I-5), nous explicitons la recherche des stabilisateurs dans Lorentz des sous algèbres de Lie de dimension 1 de $\mathcal{L}$.

Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la matrice générale de $SL(2, \mathbb{C})$. L'action de L sur $\vec{\sigma}$ s'écrit (I-7).

$$\Lambda \vec{\sigma} \cdot \vec{F} \Lambda^{-1} = \vec{\sigma} \cdot (R\vec{F}) \quad \text{avec } R \in SO(3, \mathbb{C}).$$

Le stabilisateur d'une algèbre à un paramètre est l'ensemble des matrices Λ tel que :

$$\Lambda \vec{\sigma} \cdot \vec{F} \Lambda^{-1} = \lambda \vec{\sigma} \cdot \vec{F} \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (\text{III-25})$$

D'après (III-20), nous avons deux cas à considérer :

i) $\vec{F} = (1, -i, 0)$: le stabilisateur est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha^{-2} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $\gamma \in \mathbb{C}$. L'algèbre de Lie de ce groupe est engendrée par K_z , $A_x = K_x - J_y$ et $A_y = K_y + J_x$. Ce groupe est noté par $Th(2)$, groupe de Thalès* puisqu'il est isomorphe au

* Une représentation de $Th(2)$ est donnée par le groupe des matrices réelles 3×3 de la forme

$$\begin{pmatrix} \pm e^\alpha & 0 & a_1 \\ 0 & \pm e^\alpha & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

groupe engendré par les translations et dilatations dans l'espace réel de dimension 2. Ce groupe est à deux nappes, la partie connexe correspondant aux dilatations positives.

ii) $\vec{F} = (0, 0, F_z)$: Le stabilisateur est composé de deux nappes. La première contient les matrices $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$ correspondant à $\lambda = -1$, et la deuxième les matrices $\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ correspondant à $\lambda = 1$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ce groupe est engendré par J_z et K_z . Sa composante connexe est isomorphe à $SO(2) \times L(1, 1)$. La non connexité correspond à une parité simultanée dans les plans (x, y) et (t, z) . Cette transformation est contenue dans le groupe de Lorentz (connexe) comme la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ décrivant une rotation d'angle π autour de l'axe des y .

Nous terminerons ce paragraphe par un tableau dans lequel nous donnerons pour chaque sous-groupe connexe de Lorentz les sous espaces de l'espace de MINKOWSKI laissés invariants. Ces résultats ont été établis par SHOW [61].

Les tableaux (III-3) et (III,4) apparaîtront très utiles pour la construction complète de $\Pi(\mathbb{I})$.

Sous-groupes connexes de Lorentz		Stabilisateurs et leurs générateurs [*]
Dimen- sion	Sous-groupes et générateurs	
4	$S(2) : \{J_z, K_z, A_x, A_y\}$	$S(2) : \{J_z, K_z, A_x, A_y\}$
3	$SO(3) : \{J_x, J_y, J_z\}$	$T^+(1) \times SO(3) : \{P_t, J_x, J_y, J_z\}$
	$L(2,1) : \{J_y, K_x, K_z\}$	$[T^-(1) \times L(2,1)] \sqcup Z_2 : \{P_y, J_y, K_x, K_z\}$
	$L_E(2) : \{J_z, A_x, A_y\}$	$T^0(1) \times S(2) : \{P_t - P_z, J_z, K_z, A_x, A_y\}$
	$Th(2) : \{K_z, A_x, A_y\}$	$S(2) : \{J_z, K_x, A_x, A_y\}$
	$S_f(2) : \{J_f, A_x, A_y\}$	$S(2) : \{J_z, K_z, A_x, A_y\}$
2	$S(1) : \{K_z, A_x\}$	$[T^-(1) \times S(1)] \sqcup Z_2 : \{P_y, K_z, A_x\}$
	$SO(2) \times L(1,1) : \{J_z, K_z\}$	$[SO(2) \times L(1,1)] \sqcup Z_2 : \{J_z, K_z\}$
	$A(2) : \{A_x, A_y\}$	$T^0(1) \times S(2) : \{P_t - P_z, J_z, K_z, A_x, A_y\}$
1	$F_f : \{J_f\} \sin f \neq 0$	$[SO(2) \times L(1,1)] \sqcup Z_2 : \{J_z, K_z\}$
	$SO(2) : \{J_z\}$	$[SO(2) \times E(1,1)] \sqcup Z_2 : \{P_t, P_z, J_z, K_z\}$
	$L(1,1) : \{K_z\}$	$[E(2) \times L(1,1)] \sqcup Z_2 : \{P_x, P_y, J_z, K_z\}$
	$A(1) : \{A_y\}$	$T^0(2) \sqcup Th(2) : \{P_t - P_z, P_x, K_z, A_x, A_y\}$

TABLEAU (III-3)

^{*} La transformation discrète correspond à une rotation d'angle π autour de l'axe des y, sauf dans le cas du stabilisateur de $S(1)$ où elle correspond à une rotation autour de l'axe z.

.../...

Sous-groupes connexes de Lorentz		Sous espaces invariants de T(4) avec leurs générateurs		
Dimension	Sous-groupes et leurs générateurs	Dimension 1	Dimension 2	Dimension 3
4	S(2) $\{J_z, K_z, A_x, A_y\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$		$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$
3	SO(3) $\{J_x, J_y, J_z\}$	$T^+(1)$ $\{P_t\}$		$T^-(3)$ $\{P_x, P_y, P_z\}_{irr}$
	L(2,1) $\{J_y, K_x, K_z\}$	$T^-(1)$ $\{P_y\}$		$T^+(3)$ $\{P_x, P_z, P_t\}_{irr}$
	$L_E(2)$ $\{J_z, A_x, A_y\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$		$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$
	Th(2) $\{K_z, A_x, A_y\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$	$T^0(2)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_t - P_z\}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$
	$S_f(2)$ $\{J_f, A_x, A_y\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$		$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$
2	S(1) $\{K_z, A_x\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$ ----- $T^-(1)$ $\{P_y\}$	$T^0(2)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_t - P_z\}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$ ----- $T^+(3)$ $\{P_x, P_z, P_t\}$
	SO(2)xL(1,1) $\{J_z, K_z\}$	$T^0(1)$ $\{P_t \pm P_z\}$	$T^0(2)$ $\{P_z, P_t\}$ ----- $T^-(2)$ $\{P_x, P_y\}_{irr}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t \pm P_z\}$
	A(2) $\{A_x, A_y\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$	$T^0(2)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_t - P_z\}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$

Tableau III-4 : Sous espaces invariants de T(4) sous les sous groupes de Lorentz (connexes)

Sous-groupes connexes de Lorentz		Sous espaces invariants de T(4) avec leurs générateurs		
Dimension	Sous-groupes et leurs générateurs	Dimension 1	Dimension 2	Dimension 3
1	SO(2) $\{J_z\}$	$T^0(1)$ $\{P_t \pm P_z\}$ $T^+(1)$ $\{\alpha P_t + \beta P_z\}$ $\alpha^2 > \beta^2$ $T^-(1)$ $\{\alpha P_t + \beta P_z\}$ $\alpha^2 < \beta^2$	$T^+(2)$ $\{P_t, P_z\}$ $T^-(2)$ $\{P_x, P_y\}_{irr}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t \pm P_z\}$ $T^-(3)$ $\{P_x, P_y, \beta P_t + \alpha P_z\}$ $\alpha^2 > \beta^2$ $T^+(3)$ $\{P_x, P_y, \beta P_t + \alpha P_z\}$ $\alpha^2 < \beta^2$
	L(1,1) $\{K_z\}$	$T^0(1)$ $\{P_t, P_z\}$ $T^-(1)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y\}$	$T^+(2)$ $\{P_t, P_z\}$ $T^0(2)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_t - P_z\}$ $T^-(2)$ $\{P_x, P_y\}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t \mp P_z\}$ $T^+(3)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_z, P_t\}$
	A(1) $\{A_x\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$ $T^-(1)$ $\{P_y + (P_t - P_z)\}$	$T^0(2)$ $\{\alpha P_x + \beta P_y, P_t - P_z\}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$ $T^+(3)$ $\{P_x, P_z, P_t\}$
	F_f $\{J_f\}$	$T^0(1)$ $\{P_t \pm P_z\}$	$T^+(2)$ $\{P_z, P_t\}$ $T^-(2)$ $\{P_x, P_y\}_{irr}$	$T^0(3)$ $\{P_x, P_y, P_t \pm P_z\}$

(L'irréductibilité de ces sous espaces est mentionnée pour les dimensions 2 et 3)

e) Sous-groupes connexes de $E(3)$

Le groupe $E(3)$ est le produit semi direct $T^-(3) \ltimes SO(3)$ engendré par $P_x, P_y, P_z, J_x, J_y, J_z$.

Nous pouvons maintenant utiliser les théorèmes du chapitre (II) pour construire $\Pi(E(3))$.

Du théorème (II-6) et (II-7), on déduit facilement que les algèbres maximales de $E(3)$ sont^{*} :

$$Ar^-(2) = T^-(3) \cap SO(2) = T^-(1) \times E(2)$$

engendrée par P_x, P_y, P_z, J_z

$SO(3)$ engendrée par J_x, J_y, J_z .

La seule sous algèbre de $SO(3)$ est $SO(2)$. D'après le théorème (II-5), les sous algèbres symorphes maximales de $Ar^-(2)$ sont $T^-(3)$, $E(2)$ et $T^-(1) \times SO(2)$. Les autres algèbres symorphes sont facilement obtenues. On a $SO(2)$, $T^-(2)$, $T^-(1)$. Les sous algèbres non symorphes sont : $T^-(2) \ltimes H_\omega^+$ ($\omega \neq 0$) engendrée par $P_x, P_y, J_z + P_z$ (associée aux algèbres $T^-(3)$ et $E(2)$ et H_ω^+ ($\omega \neq 0$) engendrée par $\omega J_z + P_z$ (associée aux algèbres $T^-(1)$ et $SO(2)$). $\Pi(E(3))$ est décrit dans le tableau (III-5).

^{*} On appelle groupe d'Aristote $Ar^\pm(p,q)$ le produit direct $T^\pm(1) \times E(p,q)$. Le groupe d'Aristote $Ar^+(3)$ est le plus grand sous-groupe commun au groupe de Poincaré et de Galilée.

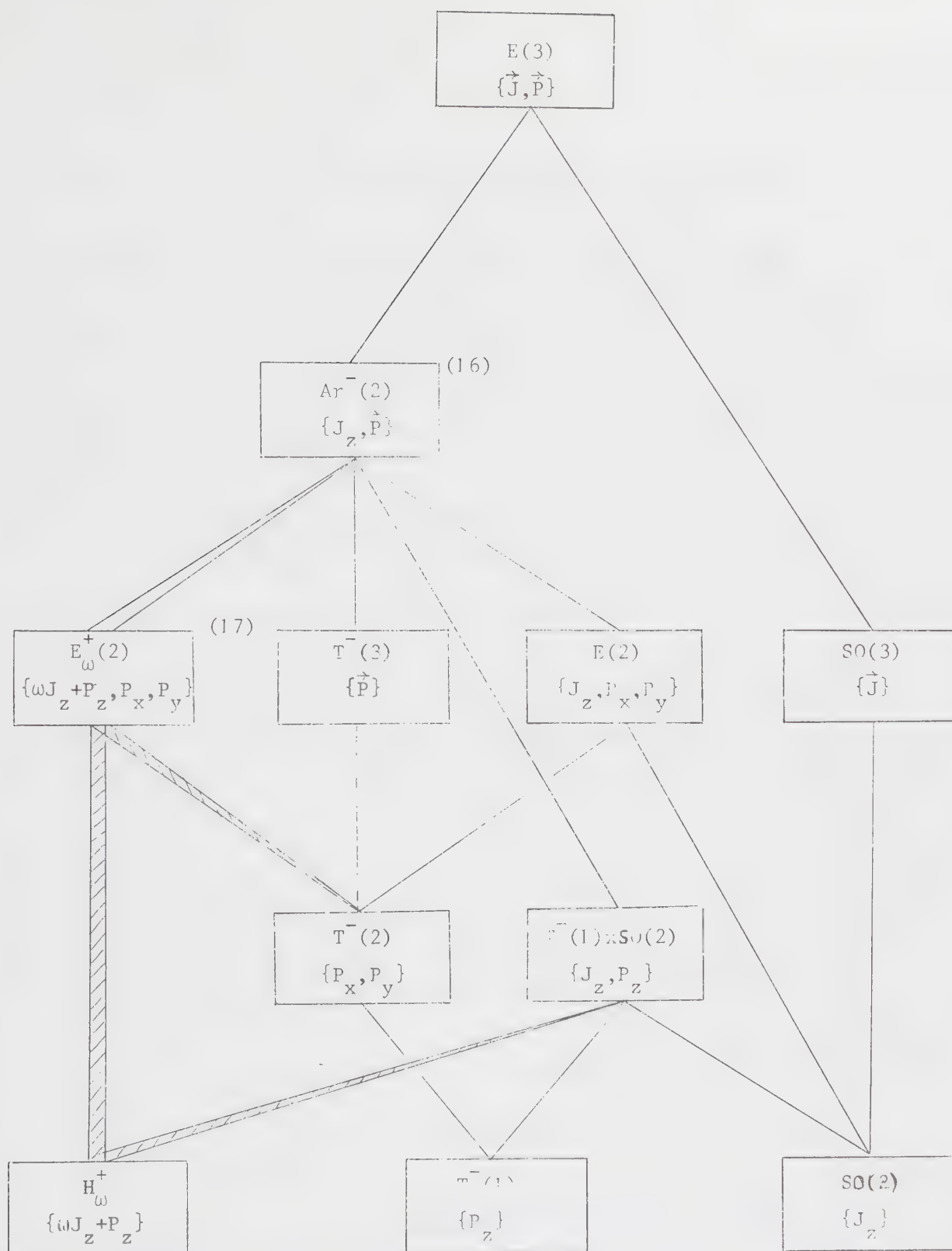


Tableau (III-5) : sous-groupes connexes de $E(3)$

(16) On a $Ar^-(2) = T^-(3) \sqcup SO(2)$

(17) $E_\omega^+(2) = T^-(2) \sqcup H_\omega^+$ est isomorphe à $E(2)$

.../...

f - Sous-groupes connexes de $E(2,1)$

Nous avons noté par $\hat{E}(2,1)$ le sous-groupe du groupe de Poincaré, dont la partie connexe est $T^+(3) \square L(2,1) = E(2,1)$. Son algèbre de Lie est engendrée par $P_t, P_x, P_y, J_z, K_x, K_y$, c'est un groupe à deux nappes contenant comme élément la rotation d'angle π autour de l'axe des y. Il est équivalent de s'intéresser à n'importe quel sous-groupe conjugué de $\hat{E}(2,1)$ dans Poincaré. En particulier, il sera intéressant de considérer celui engendré par $P_t, P_x, P_y, J_y, K_x, K_z$, la rotation de π ayant lieu maintenant autour de l'axe des z.

Notre but est de déterminer l'ensemble $\Pi(E(2,1))$. Une fois cet ensemble obtenu, pour connaître l'ensemble des sous-groupes de $E(2,1)$ à une conjugaison de Poincaré près, nous avons, suivant le théorème (III-2), à identifier les sous-groupes qui sont conjugués sous une rotation de π autour de l'axe des z.

$E(2,1)$ est le produit semi-direct $T^+(3) \square L(2,1)$ et le groupe semi-simple $L(2,1)$ agit irréductiblement sur $T^+(3)$. Les théorèmes (II-6) et (II-7) nous fournissent les sous-algèbres maximales. Elles sont toutes symorphes.

a) $T^+(3) \square S(1)$ engendrée par P_t, P_x, P_z, A_x, K_z

$Ar^+(2) = T^+(3) \square SO(2)$ engendrée par P_t, P_x, P_z, J_y

b) $L(2,1)$ engendrée par J_y, J_x, K_z .

Les sous-algèbres de $L(2,1)$ sont déjà connues. Le théorème (II-5) nous permet d'obtenir les sous-algèbres symorphes de $T^+(3) \square S(2)$.

.../...

a) $T^+(3) \boxtimes A(1)$ engendrée par P_t, P_x, P_z, A_x .

$Ar^-(1,1) = T^+(3) \boxtimes L(1,1)$ engendrée par P_t, P_x, P_z, K_z .

b) $T^+(2) \boxtimes S(1)$ engendrée par $P_t - P_z, P_x, A_x, K_z$.

Il est clair que nous avons obtenu toutes les sous-algèbres symorphes de dimension 4. On vérifiera facilement qu'il n'y en a pas de non-symorphe.

Maintenant, le théorème (II-5 a,b), ainsi que les tableaux (III-1) et (II-4) nous permettent d'obtenir toutes les sous-algèbres symorphes de $E(2,1)$ à une conjugaison de $E(2,1)$ près.

Les sous-algèbres symorphes de dimension 3 sont :

$L(2,1)$		engendrée par J_y, K_x, K_y
$T^+(1) \boxtimes S(1)$	" "	$P_t - P_z, A_x, K_z$ (isomorphe à $Th(2)$)
$T^+(2) \boxtimes L(1,1)$	" "	$P_t - P_z, P_x, K_z$ (peut être muni d'une structure de produit direct)
$E(1,1) = T^+(2) \boxtimes L(1,1)$	" "	P_t, P_z, K_z
$T^+(2) \boxtimes A(1)$	" "	$P_t - P_z, P_x, A_x$ (isomorphe à l'algèbre de Weyl $W(1)$)
$T^+(3)$	" "	(P_t, P_x, P_z)
$E(2) = T^+(2) \boxtimes SO(2)$	" "	(P_z, P_x, J_y)

La partie e du théorème (II-5) peut être utilisée avec les théorèmes (II-2), (II-3), (II-4) et le tableau (III-4) pour obtenir les sous-algèbres symorphes de dimension 3.

i) $\text{Jor}_\sigma(2) = (T^\circ(1) \times A(1) \boxtimes V_\sigma)^{(*)}$ engendrée par $P_t - P_z, A_x,$

$$V_\sigma = \sigma K_z + P_x \quad (\sigma \neq 0)$$

Les algèbres symorphes associées sont $T^\circ(1) \boxtimes S(1)$ et $L(2) \boxtimes A(1)$.

Remarquons que $\text{Jor}_\sigma(2)$ et $\text{Jor}_{-\sigma}(2)$ sont conjuguées sous une rotation d'angle π autour de l'axe des z .

ii) $T^\circ(2) \boxtimes V_\sigma$ engendrée par $P_t, P_z, V_\sigma = \sigma K_z + P_x \quad (\sigma \neq 0)$.

Les algèbres de Lie associées sont $T^+(2) \boxtimes L(1,1)$ et $T^+(3)$. Une rotation d'angle π autour de l'axe des z change σ en $-\sigma$.

iii) $T^\circ(2) \boxtimes A_\varepsilon^-(1)$ engendrée par $P_t - P_z, P_x, A_x + \varepsilon(P_t - P_z)$ ($\varepsilon = \pm 1$). Les algèbres associées symorphes sont $T^\circ(2) \boxtimes A(1)$ et $T^\circ(3)$. Cette algèbre est symorphe à $T^\circ(2) \boxtimes A(1)$. Remarquons que $T^\circ(2) \boxtimes A_\varepsilon^-(1)$ et $T^\circ(2) \boxtimes A_{-\varepsilon}^-(1)$ sont conjuguées dans $\hat{E}(2,1)$.

iv) $E_\omega^-(2) = T^\circ(2) \boxtimes H_\omega^-$, isomorphes à $E(2)$, engendrées par $P_x, P_z, \omega J_y + P_t \quad (\omega \neq 0)$. Les algèbres de Lie associées sont $E(2)$ et $T^+(3)$. $E_\omega^-(2)$ et $E_{-\omega}^-(2)$ sont conjuguées dans $\hat{E}(2,1)$, mais pas dans $E(2,1)$.

(*)

On définira les algèbres de Lie de Jordan $\text{Jor}(n)$ comme suit : c'est le produit semi-direct $T(n) \boxtimes T(1)$ où $T(n)$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension n et tel que l'action du générateur de $T(1)$ sur $T(n)$ puisse se réduire à la forme de Jordan.

.../...

De la même façon, nous obtenons les sous-algèbres de dimension 2. Les sous-algèbres symorphes sont :

$S(1)$	engendrée par	K_z, A_x
$T^-(1) \times L(1,1)$	engendrée par	P_x, K_z
$T^-(1) \times L(1,1)$	"	" $P_t - P_z, K_z$
$T^-(1) \times A(1)$	"	" $P_t - P_z, A_x$
$I^-(2)$	"	" $P_t - P_z, P_x$
$I^-(2)$	"	" P_t, P_x
$I^-(2)$	"	" P_x, P_z
$T^+(1) \times SO(2)$	"	" P_t, J_y

Toutes ces algèbres sont abéliennes, sauf les deux algèbres isomorphes $S(1)$ et $T^+(1) \times L(1,1)$

Les algèbres non-symorphes

i) $T^+(1) \times V_\sigma$, ($\sigma \neq 0$) isomorphe à $S(1)$, les algèbres symorphes associées étant $T^+(1) \times L(1,1)$ et $T^+(2)$. Le changement de σ en $-\sigma$ est réalisé par une conjugaison de $\hat{E}(2,1)$

ii) $T^+(1) \times A^-(1)$, les algèbres associées étant $T^+(1) \times A(1)$ et $I^+(2)$.

On remarquera que toute algèbre de dimension 1 est engendrée par un générateur de la forme t , ℓ ou $\ell+t$ avec $\ell \in L(2,1)$, $t \in T^+(3)$. On vérifiera que l'on trouve les neuf cases données dans la dernière ligne du tableau II-6.

IV - LES FILS ET PETITS-FILS DU GROUPE DE POINCARÉ

Ce chapitre est réservé à la recherche des sous-groupes connexes maximaux du groupe de Poincaré $\mathbf{P}$ (les fils) et leurs sous-groupes connexes maximaux (les petits-fils).

La première partie de cette étude est relativement facile, à cause de la simplicité des théorèmes (III-6) et (III-7). Suivant ces théorèmes, tous les fils sont symorphes. En plus du groupe de Lorentz, ils comprennent tous les produits semi-directs de $T(4)$ par un sous-groupe maximal de Lorentz. Ainsi, $\mathbf{P}$ a 4 fils

$L(3,1)$ le groupe de Lorentz engendré par $J_x, J_y, J_z, K_x, K_y, K_z$

$IS(2)$ le groupe inhomogène $S(2)$ " " $P_t, P_x, P_y, P_z, K_z, A_x, A_y$

$A\tilde{r}^+(3) = T^+(1) \times E(3)$ le groupe d'Aristote engendré par

$P_t, P_x, P_y, P_z, J_x, J_y, J_z$

$A\tilde{r}^-(2,1) = T^-(1) \times E(2,1)$ engendré par

$P_t, P_x, P_y, J_z, K_x, K_y$

A - Sous-groupes connexes maximaux de $IS(2)$

Il est intéressant de remarquer que $IS(2)$ contient tous les sous-groupes connexes résolubles de $\mathbf{P}$. Ceci est une conséquence directe du théorème de Borel-Morozov pour les algèbres de Lie complexes semi-simples ^(*).

(*) Soit $\mathfrak{P} = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{L}$ une algèbre de Lie inhomogène avec $\mathfrak{L}$ isomorphe à une algèbre de Lie complexe semi-simple. Soit $\mathfrak{B}$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{L}$. Il est clair que $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{B}$ est résoluble. Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_A + \mathfrak{L}_A + \mathfrak{M}_A$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{L}_A + \mathfrak{L}'_A$ est aussi résoluble et, suivant le théorème de Borel-Morozov, est conjuguée d'une sous-algèbre de $\mathfrak{B}$ (la conjugaison dans $\mathbf{P}$ étant équivalente à une conjugaison dans $\mathfrak{L}$). Par suite, $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{B}$.

$S(2)$ possède 2 sous-espaces invariants dans $T(4)$, les sous-espaces $T^\circ(1)$ et $T^\circ(3)$ engendrés respectivement par $P_t - P_z$ et par $P_t - P_z, P_x, P_y$. Le théorème (II-5) et le tableau (III-2) nous permettent de déterminer les sous-algèbres symorphes de $IS(2)$ qui sont maximales

- a) $T(4) \supset L_E(2)$ engendrée par $P_t, P_x, P_y, P_z, J_z, A_x, A_y$
 $T(4) \supset S_f(2)$ " " $P_t, P_x, P_y, P_z, J_f, A_x, A_y$
 $T(4) \supset Th(2)$ " " $P_t, P_x, P_y, P_z, K_z, A_x, A_y$
 $T(4) \supset [SO(2) \times L(2,1)]$ engendrée par $P_t, P_x, P_y, P_z, J_z, K_z$
- b) $T^\circ(3) \supset S(2)$ engendrée par $P_t - P_z, P_x, P_y, J_z, K_z, A_x, A_y$

Nous pouvons montrer que $IS(2)$ n'a pas de sous-algèbre maximale non-symorphe de la façon suivante.

En effet, suivant le théorème (II-5), l'algèbre $\mathcal{L}$ -associée d'une telle algèbre non-symorphe serait $T^\circ(3) \supset S(2)$ qui est de dimension 7. De plus, son algèbre t -associée ne peut être $T(4) \supset [SO(2) \times L(1,1)]$ qui est de dimension 6 et $\mathcal{L}_A$ serait obligatoirement une des algèbres suivantes : $L_E(2), S_f(2), Th(2)$. Quel que soit le choix, nous avons $[\mathcal{L}_A, \mathcal{L}'_A] = 0$ et, suivant le théorème (II-2), $\mathcal{L}'_A$ doit commuter avec $\mathcal{L}_A$. Si l'on se réfère au tableau (III-4), il est facile de voir qu'il n'y a pas de solution.

B - Sous-groupes connexes maximaux de $A_2^+(3) = T^+(1) \times E(3)$

Le problème est plus facile que le précédent, puisque nous avons une structure de produit direct avec $\mathcal{L}$ de dimension 1. Nous pouvons appliquer le théorème (II-9). Avec l'aide du tableau (III-5), nous obtenons les sous-algèbres maximales

.../...

symorphes :

- a) $T^+(1) \times Ar^-(2) = T^+(4) \cap SO(2)$ engendrée par P_t, P_x, P_y, P_z, J_z
 $T^+(1) \times SO(3)$ " " P_t, J_x, J_y, J_z
- b) $E(3)$ " " $P_x, P_y, P_z, J_x, J_y, J_z$

Si nous remarquons que l'algèbre dérivée de $Ar^+(3)$ est $E(3)$, toute algèbre non-symorphe sera de la forme $\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A^P$ avec $\mathcal{L}_A$ de dimension 5. Nous savons que $E(3)$ n'a pas de sous-algèbre de dimension 5. Ainsi il n'y a pas d'algèbre maximale non-symorphe dans $Ar^+(3)$.

C - Sous-groupes connexes maximaux de $Ar^-(2,1) = T^-(1) \times E(2,1)$

La situation est la même que pour $Ar^+(3)$. Les sous-algèbres maximales qui sont symorphes sont :

- a) $T^-(1) \times [T^+(3) \cap S(1)] = T(4) \cap S(1)$ engendrée par
 $P_t, P_x, P_y, P_z, K_z, A_x$
 $T^-(1) \times Ar^+(2) = T(4) \cap SO(2)$ engendrée par P_t, P_x, P_y, P_z, J_z
 $T^-(1) \times L(2,1)$ " " P_z, J_z, K_x, K_y
- b) $E(2,1)$ " " $P_t, P_x, P_y, J_z, K_x, K_y$

Tous les résultats ci-dessus sont résumés dans le tableau (IV-1). Nous ajouterons les remarques suivantes :

i) Tous les fils ou petits-fils de $\mathcal{P}$ sont symorphes ou homogènes.

.../...

ii) Chaque sous-groupe de dimension supérieure à 6 est soit fils, soit petit-fils de $\mathbb{P}$.

iii) Un sous-groupe donné ne peut être à la fois fils et petit-fils, mais d'autres filiations peuvent se présenter. Par exemple, $SO(3)$ est à la fois petit-fils et arrière petit-fils de $\mathbb{P}$ puisque les deux chaînes suivantes existent :

$$\mathbb{P} \supseteq Ar^+(3) \supseteq E(3) \supseteq SO(3)$$

$$\mathbb{P} \supseteq L(3,1) \supseteq SO(3)$$

où le symbole $\supseteq$ est utilisé pour "l'inclusion maximale"

Dans le tableau (IV-1) nous utiliserons une ligne en pointillés pour marquer une telle inclusion qui ne correspond pas à une filiation fils ou petit-fils. Une flèche signifie que les sous-groupes correspondants sont déjà connus.

Nous avons obtenu la partie supérieure de Π ; nous allons nous intéresser maintenant à la partie inférieure, c'est-à-dire à la classification des algèbres de petite dimension.

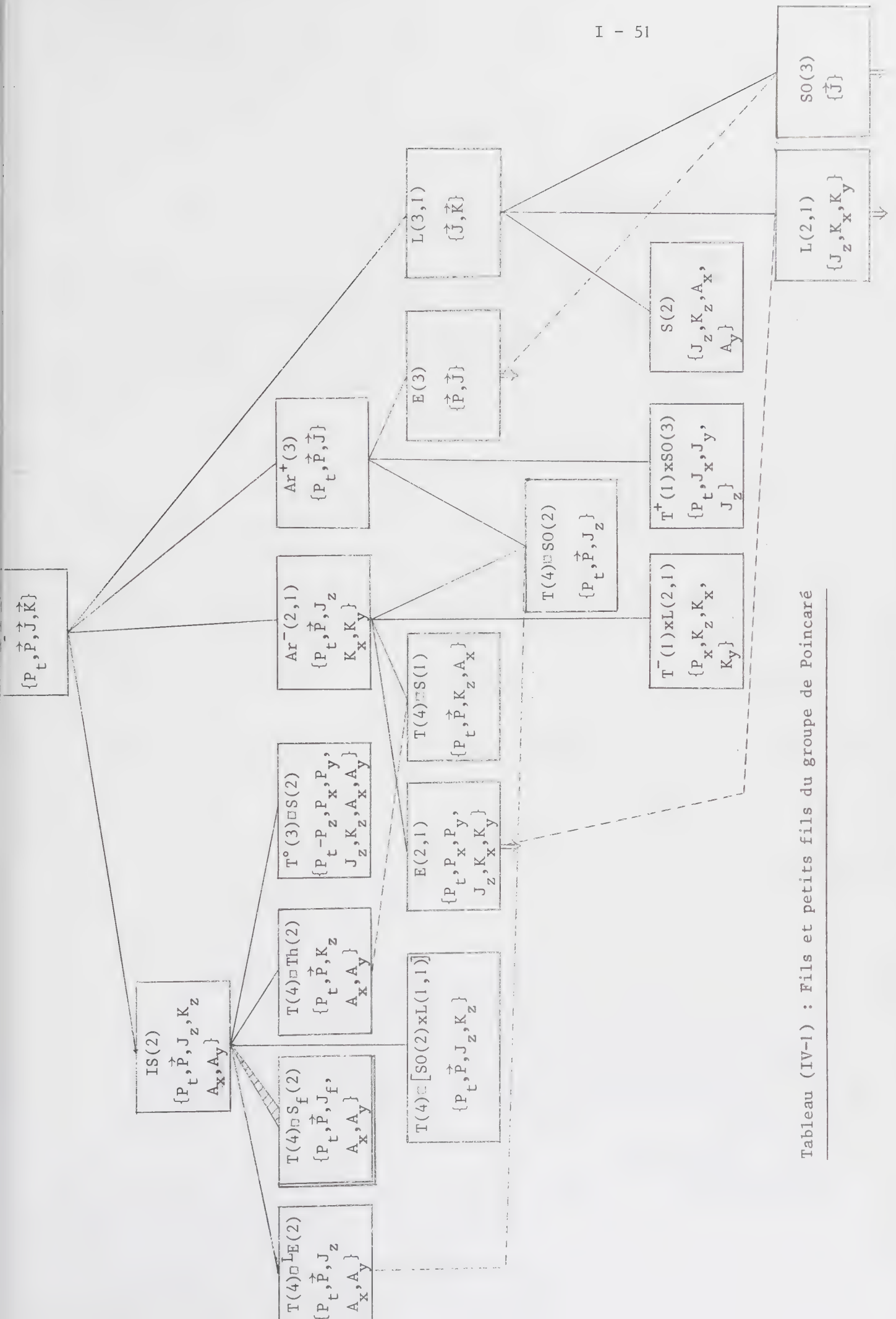


Tableau (IV-1) : Fils et petits fils du groupe de Poincaré

V - SOUS-GROUPES CONNEXES DE DIMENSION 1

Dans le but de trouver les sous-algèbres de dimension 1, nous utiliserons une méthode similaire à celle utilisée pour Lorentz. Nous construirons dans un premier temps les invariants, puis nous essayerons de définir un élément "canonique" sur chaque orbite dans $\hat{\mathcal{P}}$.

1) Invariants dans $\hat{\mathcal{P}}$ sous P

Nous considérerons, d'abord, les invariants dans $\mathcal{P}$ sous P ; il sera alors facile de déduire ceux dans $\hat{\mathcal{P}}$ sous P. A partir d'un élément (x, F) , nous pouvons construire quatre (*) scalaires de Lorentz "continus" indépendants, $\Delta(F)$, $\Phi(F)$, $(F^* \cdot x)^2 = U$, x^2 , et des invariants discrets, tels que le signe

(*)

Il est bien connu que le groupe de Lorentz a seulement deux invariants

$$\Delta(F) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \Phi(F) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} \quad (V-1)$$

avec

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Nous avons, de plus, les égalités suivantes :

$$(x F^*)(F x) = - \frac{1}{2} \Phi(F) x^2 \quad (V-2)$$

et

$$x^2 \Delta(F) = (F x)^2 - (F^* x)^2 \quad (V-3)$$

avec

$$(F x)^\mu = F^{\mu\nu} x_\nu$$

Ces identités restreignent le nombre d'invariants "continus".

.../...

de la composante temporelle d'un vecteur du genre temps, ou du genre lumière construit avec F et x.

Considérons toutes les fonctions réelles h des quatre variables, Δ , Φ , U, x^2 , qui sont invariantes sous l'action des translations. Par une translation infinitésimale a, la fonction h devient :

$$\begin{aligned} h(\Delta, \Phi, U, x^2) \rightarrow h(\Delta, \Phi, U, x^2) + \Phi \frac{\partial F}{\partial U} a F^* + 2 \frac{\partial h}{\partial (x^2)} a F x \\ - \frac{\Phi^2}{4} \frac{\partial h}{\partial U} a^2 + \frac{\partial}{\partial (x^2)} (Fa)^2 + \frac{\Phi^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial U^2} (a F^* x)^2 + \theta(a^3) \end{aligned} \quad (V-4)$$

La condition d'invariance sur h pour toute translation a implique (*)

$$\Phi \frac{\partial h}{\partial U} F^* x + 2 \frac{\partial}{\partial (x^2)} F x = 0 \quad (V-5)$$

$$- \frac{\Phi^2}{4} \frac{\partial h}{\partial U} a^2 + \frac{\partial}{\partial (x^2)} (Fa)^2 + \frac{\Phi^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial U^2} (a \cdot F^* x) = 0, \quad \forall a \quad (V-6)$$

En remplaçant h par Δ et Φ successivement dans (V-5) et (V-6), on montre que Δ et Φ sont tous les deux invariants par translation. Ce résultat peut être rapidement obtenu à partir du théorème (III-1).

(*)

Nous regardons seulement les termes du premier et du deuxième ordre. Cependant, il est facile de voir que la fonction obtenue est invariante à tous les ordres.

.../...

Cas 1 : $\Phi(F) \neq 0$

F est non singulier ($\det(F_{\mu\nu}) = [\Phi(F)]^2$). Ainsi, pourvu que $x \neq 0$, on obtient $Fx \neq 0$ et $F^*x \neq 0$. En faisant le produit scalaire du membre de gauche de (V-5) par $F.x$, puis par F^*x , il n'est pas difficile de montrer, avec l'aide des identités (V-2) et (V-3) que Φ et Δ sont les seuls invariants continus.

Cas 2 : $\Phi(F) = 0, F \neq 0$

Il existe un vecteur a tel que $(Fa)^2 \neq 0$. Par suite (V-6) implique que h ne peut pas dépendre de x^2 . Les seuls invariants continus étant Δ et U .

Cas 3 : $F = 0$ (translation pure)

Le seul invariant est x^2 .

Maintenant, les invariants dans $\hat{G}$ sont les fonctions $\hat{h}$ qui satisfont aussi la condition

$$\hat{h}(x, F) = \hat{h}(\lambda x, \lambda F) \quad \text{avec } \lambda \neq 0 \quad (V-7)$$

C'est-à-dire, $\hat{h}$ doit être une fonction homogène de degré zéro en x et F . Il est clair que si Φ et Δ ne sont pas nuls, le rapport Φ/Δ est un invariant.

Cas 1 : $\Phi(F) \neq 0$

Puisque Δ et Φ sont les seuls invariants continus dans $\hat{G}$, $\text{tg } f = \Phi/\Delta$ est le seul invariant continu dans $\hat{G}$.

.../...

Remarquons que toutes les valeurs de f sont possibles, sauf celles pour lesquelles Φ s'annule, c'est-à-dire $f = 0$ ou π . Le fait qu'il n'existe pas d'invariant discret sera montré plus loin.

Cas 2 : $\Phi(F) = 0$, $F \neq 0$

Le seul invariant continu est U/Δ^2 . Nous avons trois sous-cas à étudier, $f = 0$, $f = \pi$ et $\Delta = 0$, correspondant au genre du tenseur F (voir Appendice D). En plus de ces invariants discrets, on peut facilement vérifier que le genre du vecteur F^*x est aussi un invariant. Nous donnons les résultats obtenus dans le tableau (V-1). Un certain nombre de cases ont été supprimées à cause d'impossibilités entre les genres de F et F^*x .

Genre de F^*x / Genre de F	Temps (futur)	Temps (passé)	Lumière (futur)	Lumière (passé)	Espace	Zéro
$\Delta > 0$ ($f=0$)	$\frac{U}{\Delta^2}$	$\frac{U}{\Delta^2}$	1 orbite	1 orbite	$\frac{U}{\Delta^2}$	1 orbite
$\Delta < 0$ ($f=\pi$)					$\frac{U}{\Delta^2}$	1 orbite
$\Delta = 0$			1 orbite	1 orbite	1 orbite	1 orbite

Tableau V-1

Cas 3 : $F = 0$ (translation pure)

Il est clair qu'il n'y a pas d'invariant continu et que les seuls invariants discrets correspondent aux trois genres du quadrivecteur x , genre temps ($x^2 > 0$), genre lumière ($x^2 = 0$) et genre espace ($x^2 < 0$). Ces trois cas correspondent aux sous-groupes de dimension 1, $T^+(1)$, $T^0(1)$ et $T^-(1)$ respectivement.

Nous n'avons pas encore prouvé que notre classification des orbites, à l'aide des invariants, était complète. En fait, nous ne sommes pas certains d'avoir obtenu tous les invariants discrets. L'étude directe suivante fournit la preuve que la classification ci-dessus est complète.

2) Orbites dans $\hat{\mathcal{P}}$ sous $\mathcal{P}$

Nous cherchons à définir sur chaque orbite un élément "canonique", c'est-à-dire un élément dont l'expression est simple. Nous procédons de la manière suivante. Soit $(\widehat{x}, F)$ un élément de $\hat{\mathcal{P}}$. En utilisant une transformation de Lorentz, on peut dans une première étape mettre F sous sa forme canonique F' (diagonale ou forme de Jordan)* définie au chapitre III § c. Ce nouvel élément peut, dans une deuxième étape, être transformé en un élément "canonique" à l'aide d'une transformation de Poincaré, dont la partie Lorentz appartient au stabilisateur de F' . Les éléments du sous-groupe de $\mathcal{P}$ qui laisse invariant la partie Lorentz F' (à un facteur multiplicatif λ près) de $(\widehat{x'}, F')$ sont de la forme (a, L_F) où L_F appartient au stabilisateur de F' (voir tableau III-3), a étant une translation. Nous obtenons la relation

(*) Le cas $F = 0$ doit être considéré lorsque $x \neq 0$.

$$(a, L_F)(x, F)(a, L_F)^{-1} = (L_F x + \lambda a F, \lambda F), \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (V-8)$$

En particulier (x, F) est transformé en $(x + aF, F)$ par l'action de $(a, 1)$.

Considérons maintenant les divers cas suivant la forme canonique de F :

Cas 1 : $\Phi \neq 0$ (Le générateur de Lorentz est J_f)

Les composantes du vecteur aF sont : $a^3 \sin f/2$, $a^2 \cos f/2$, $-a^{-1} \cos f/2$, $a^0 \sin f/2$, ce qui montre que pour chaque (x, F) ou F correspondant à un élément J_f de $\mathcal{L}$, il existe une transformation $(a, 1)$ telle que

$$(a, 1)(x, F)(a, 1)^{-1} = (a, F) \quad (V-9)$$

Par suite, nous avons seulement les classes F_f .

Cas 2 : $\Phi = 0$

i) $f = 0$ (générateur de Lorentz J_z)

A l'aide d'une translation, on peut annuler les composantes x^1 et x^2 du vecteur x . Une transformation de Lorentz pure le long de l'axe des z (suivie, si cela est nécessaire, d'une rotation d'angle π autour de l'axe des y) permet d'appliquer le vecteur x sur un vecteur donné dont le genre dépend du genre de F^*x . Nous obtenons cinq sortes de classes d'algèbres de Lie de dimension 1. Ces algèbres sont données dans le tableau (V-2), première ligne.

ii) $f = \pi$ (générateur de Lorentz K_z)

En utilisant une translation suivie d'une rotation autour

.../...

de l'axe des z , nous obtenons deux types de classes qui sont données dans la deuxième ligne du tableau (V-2).

iii) $\Delta = 0$ (générateur de Lorentz A_y)

Après une translation, nous faisons une transformation engendrée par A_y , une transformation de Lorentz pure le long de l'axe des z et, si cela est nécessaire, une rotation d'angle π autour du même axe. Nous sommes conduits à considérer quatre classes qui sont données dans la dernière ligne du tableau (V-2).

Genre de F^{*x} Genre de F	Temps (futur)	Temps (passé)	Lumière (futur)	Lumière (passé)	Espace	Zéro
$f = 0$	H_ω^+ $\omega < 0$ $\{\omega J_z + P_z\}$	$\omega > 0$	$H^\uparrow$ $\{J_z + P_t + P_z\}$	$H^\downarrow$ $\{J_z + P_t - P_z\}$	H_ω^- $\omega > 0$ $\{\omega J_z + P_t\}$	$SO(2)$ $\{J_z\}$
$f = \pi$					V_σ $\sigma > 0$ $\{\sigma K_z + P_x\}$	$L(1,1)$ $\{K_z\}$
$\Delta = 0$			$A^\uparrow(1)$ $\{A_y + P_z\}$	$A^\downarrow(1)$ $\{A_y - P_x\}$	$A^-(1)$ $\{A_y + P_t + P_z\}$	$A(1)$ $\{A_y\}$

TABLEAU (V-2)

Dans nos notations, H est utilisé pour hélicité, V pour vitesse et les subscripts $+$, $-$, $\uparrow$, $\downarrow$, correspondent au genre du vecteur F^{*x} .

.../...

Cas 3 : F = 0

Ce cas a déjà été considéré, nous rappelons simplement les résultats dans le tableau suivant.

Genre de x Genre de F	Temps	Lumière	Espace
F = 0	$T^+(1)$ $\{P_t\}$	$T^0(1)$ $\{P_t - P_z\}$	$T^-(1)$ $\{P_z\}$

Tableau (V-3)

(Les subscripts caractérisent le genre de x.)

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux stabilisateurs de ces sous-algèbres de $\mathcal{D}$ de dimension 1. En accord avec (I-11), le stabilisateur d'une sous-algèbre de dimension 1, caractérisée par l'élément $(\widehat{x}, \widehat{F})$ de $\widehat{\mathcal{D}}$, est l'ensemble des éléments (a, F) tel que

$$\begin{aligned} \sigma(Lx + aF') &= \lambda \sigma(x) \\ &\text{avec } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned} \quad (V-10)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{F}' = \lambda \vec{\sigma} \cdot \vec{F}$$

Il en découle que si (a, L) appartient au stabilisateur de $(\widehat{x}, \widehat{F})$, L appartient au stabilisateur $\mathbf{L}_F$ de $\widehat{F}$ dans Lorentz L . Nous avons donc à considérer l'équation

$$\sigma(L_F x + \lambda a F) = \lambda \sigma(x) \quad (V-11)$$

où L_F appartient à $\mathbf{L}_F$.

.../...

La classification des stabilisateurs des sous-algèbres de dimension 1 de $\mathfrak{g}$ donnée dans le tableau (III,3) conduit à diviser notre étude en trois parties correspondant aux trois formes de F ($\vec{F} = (1, -i, 0)$; $\vec{F} = (0, 0, F_z)$; $\vec{F} = 0$). Dans chaque cas, nous avons à considérer les divers genres de x tels qu'ils apparaissent dans les tableaux (V-2) et (V-3). Nos résultats sont résumés dans le tableau (V-4).

Il est intéressant de remarquer que tous ces sous-groupes ont une interprétation physique que nous étudierons dans l'appendice C.

Sous algèbres de dimension 1 dans $\mathcal{P}$

Elément re-présentatif	Invariants correspondants	Symbole	Stabilisateurs et générateurs
J_f	f $\sin f \neq 0$	F_f	$[SO(2) \times L(1,1)] \square Z_2 : \{J_z, K_z\}$
J_z	$f=0$ $\left\{ \begin{array}{l} F^* \cdot x = 0 \\ (\frac{F^* \cdot x}{\Delta})^2 = -\omega^{-2} \\ (\frac{F^* \cdot x}{\Delta})^2 = -\omega^{-2} \\ \text{sgn}(F^* \cdot x)^0 = -\text{sgn } \omega \\ \text{sgn}(F^* \cdot x)^0 = + (\frac{F^* \cdot x}{\Delta})^2 = 0 \\ \text{sgn}(F^* \cdot x)^0 = - (F^* \cdot x) \neq 0 \end{array} \right.$	$SO(2)$	$[SO(2) \times E(1,1)] \square Z_2 : \{J_z, K_z, P_t, P_z\}$
$\omega J_z + P_t ; \omega > 0$		H_ω^-	$T^+(2) \times SO(2) : \{J_z, P_t, P_z\}$
$\omega J_z + P_z ; \omega \neq 0$		H_ω^+	$[T^+(2) \times SO(2)] \square Z_2 : \{J_z, P_t, P_z\}$
$J_z - (P_t - P_z)$		$H^\uparrow$	$T^+(2) \times SO(2) : \{J_z, P_t, P_z\}$
$J_z + (P_t - P_z)$		$H^\downarrow$	
K_z	$f=\pi$ $\left\{ \begin{array}{l} (\frac{F^* \cdot x}{\Delta})^2 = 0 \\ (\frac{F^* \cdot x}{\Delta})^2 = -\sigma^{-2} \end{array} \right.$	$L(1,1)$	$[E(2) \times L(1,1)] \square Z_2 : \{K_z, J_z, P_x, P_y\}$
$\sigma K_z + P_y$ $\sigma > 0$		V_σ	$T^-(2) \times L(1,1) : \{K_z, P_x, P_y\}$
A_y	$\Delta = \phi = 0$ $F \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} F^* \cdot x = 0 \\ (F^* \cdot x)^2 = -1 \\ \text{sgn}(F^* \cdot x)^0 = + (F^* \cdot x)^2 = 0 \\ \text{sgn}(F^* \cdot x)^0 = - (F^* \cdot x) \neq 0 \end{array} \right.$	$A(1)$	$T^0(2) \square Th(2) : \{K_z, A_x, A_y, P_x, P_t - P_z\}$
$A_y + P_t + P_z$		$A^-(1)$	$T^0(2) \times A^-(1) : \{A_y + P_t + P_z, P_x, P_t - P_z\}$
$A_y + P_x$		$A^\uparrow(1)$	$\{[T^0(2) \square A^\downarrow(1)] \square A(1)\} \square Z_2 : \{A_x + P_y, A_y, P_x, P_t - P_z\}$
$A_y - P_x$		$A^\downarrow(1)$	$\{[T^0(2) \square A^\uparrow(1)] \square A(1)\} \square Z_2 : \{A_x - P_y, A_y, P_x, P_t - P_z\}$
P_t	$F=0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{sgn } x^2 = + \\ \text{sgn } x^2 = 0 \\ \text{sgn } x^2 = - \end{array} \right.$	$T^+(1)$	$T^+(1) \times E(3) : \{P_t, \vec{P}, \vec{J}\}$
$P_t - P_z$		$T^0(1)$	$IS(2) : \{P_t, \vec{P}, J_z, K_z, A_x, A_y\}$
P_z		$T^-(1)$	$T^-(1) \times E(2,1) : \{P_z, P_t, P_x, P_y, J_z, K_x, K_y\}$

Tableau (V-4)

N.B. - Dans nos notations, le groupe discret $Z_2 = (1, -1)$ correspond à une rotation de π autour de l'axe des y , sauf dans les cas $A^{\uparrow(\downarrow)}(1)$ où la rotation de π a lieu autour de l'axe des z .

VI - SOUS-GROUPES CONNEXES DE DIMENSION 2 ET 3

Rappelons qu'un élément de l'algèbre de Lie de Poincaré s'écrit

$$(x, F) = x^\mu P_\mu + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \quad (\text{VI-1})$$

où les P_μ et les $M_{\mu\nu}$ sont les générateurs usuels du groupe de Poincaré (chaque couple (x, F) construit à l'aide d'un quadrivecteur x et d'un tenseur antisymétrique de rang 2 $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, correspond à un seul élément de l'algèbre de Lie).

Avec ces notations, le crochet de Lie de deux éléments (x, F) et (x', F') de l'algèbre de Lie de Poincaré devient :

$$[(x, F), (x', F')] = (xF' - x'F, F \wedge F') \quad (\text{VI-2})$$

où

$$(xF)^\mu = x_\nu F^{\mu\nu} \quad (\text{VI-3})$$

et le tenseur antisymétrique de rang 2 $F \wedge F'$ est défini par

$$(F \wedge F')^{\mu\nu} = F^{\mu\rho} F'^{\nu}_{\rho} - F^{\nu\rho} F'^{\mu}_{\rho} \quad (\text{VI-4})$$

Dans l'appendice D, nous rappellerons certaines définitions d'algèbre tensorielle et donnerons des théorèmes utiles pour la recherche des algèbres de dimension 2 et 3.

.../...

1) Sous-groupes connexes de dimension 2

Il est bien connu [33] qu'il n'y a que deux algèbres de Lie non-isomorphes. Leurs formes canoniques sont :

$$[A, B] = 0 \quad (\text{VI-5})$$

(algèbre abélienne, notée $(g_1)^2$ dans ref [23] et $2g_1$ dans [54])

$$[A, B] = B \quad (\text{VI-6})$$

(l'algèbre de $S(1)$, notée g_2 dans ref [3] et [54]).

A - Algèbres abéliennes

Suivant le théorème (D-7), nous pouvons choisir comme générateur d'une algèbre abélienne (x, F) et $(x', \lambda F^*)$ avec la relation

$$F x' = \lambda F^* x \quad (\text{VI-7})$$

où λ peut prendre les valeurs 0 ou 1.

Nous avons à considérer trois cas $F = 0$; $F \neq 0$, $\lambda = 0$ et $F \neq 0$, $\lambda = 1$.

i) Cas $F = 0$

Les sous algèbres du groupe des translations ont été étudiées au chapitre (III). Nous rappelons ces résultats dans les trois premières lignes du tableau (VI-1).

ii) Cas $F \neq 0$, $\lambda = 0$

Les générateurs sont alors (x, F) et $(x, 0)$. La relation (VI-3) devient

$$F.x' = 0 \quad (\text{VI-8})$$

.../...

Comme conséquence du tableau (VI-1), nous avons $\phi(F) = 0$ et x' appartient au plan de F^* .

Par un automorphisme intérieur, nous pouvons transformer l'élément (x, F) en l'un des éléments de la première colonne du tableau (V-4) (remarquons que (x, F) ne peut être ni J_f , ni une translation pure).

Si $x = 0$, alors $(0, F)$ est un générateur de Lorentz (algèbre isomorphe) et $(x', 0)$ engendre un sous espace de dimension 1 invariant sous $(0, F)$. La colonne 2 du tableau (III-4) nous donne la translation que l'on peut choisir, à une conjugaison du stabilisateur de $(0, L)$ près.

Il sera utile de remarquer que, si x' n'est pas du genre lumière, x et x' peuvent être choisis orthogonaux. Ceci peut être mis en évidence en prenant comme générateurs les deux éléments $(x + \alpha x', F)$ et $(x', 0)$ avec

$$\alpha = - \frac{x \cdot x'}{x'^2}$$

Si x' est du genre lumière, nous devons considérer deux cas :

a) Le couple (x, x') engendre un plan du type hyperbolique ; alors, par combinaison linéaire, on peut choisir x selon la deuxième direction du genre lumière.

b) Le couple (x, x') engendre un plan tangent, alors x est du genre espace et est défini à un vecteur colinéaire à x' près.

Nous donnons les résultats correspondants dans la case "algèbre abélienne" $\dim \mathcal{C}_A = 1$ du tableau (VI-1).

.../...

iii) Cas $F \neq 0$, $\lambda = 1$

Suivant la relation (II-9), F et F^* doivent former une base d'une algèbre de Lie de dimension 2 de Lorentz. Le tableau (III-2) montre qu'il existe deux telles algèbres non-conjuguées: $SO(2) \times L(1,1)$ engendrée par J_z , K_z et $A(2)$ engendrée par A_x , A_y . Si F et F^* correspondent respectivement à J_z et K_z , alors F et F^* sont des tenseurs orthogonaux. La relation (VI-7) n'est alors possible que si $Fx' = F^*x = 0$.

Utilisant le tableau (D-1) et le théorème (D-2), on peut choisir $x = x' = 0$. Ainsi, il n'y a pas d'algèbre non-symorphe de ce type.

Si F et F^* correspondent respectivement à A_y et A_x , la relation (VI-7) n'est possible que si Fx' et F^*x sont, selon la direction du genre lumière, intersection des plans des tenseurs F et F^* . Ainsi, x et x' sont dans l'hyperplan engendré par F et F^* . Par un automorphisme intérieur, on peut choisir (x, F) comme l'un des éléments suivants A_y , $A_x + P_x$, $A_y - P_x$. Remarquons qu'après une telle transformation, A_x reste la partie Lorentz du second générateur.

i) $(x, F) = A_y$

Dans ce cas, $Fx' = 0$ et x' est le plan de F^* . Du tableau (D-1), on déduit qu'une translation a qui stabilise A_y est telle que le vecteur F^*a est nul ou dirigé selon la direction du genre lumière du plan de F^* . Ainsi, nous pouvons choisir x' selon l'axe des x . Par transformation de Lorentz pure le long de l'axe des z on obtient les trois algèbres non-conjuguées

.../...

$A(2)$ engendrée par A_x, A_y

$A_+(2) = A_+(1) \times A(1)$ engendrée par $A_x + P_x, A_y$

$A_-(2) = A_-(1) \times A(1)$ engendrée par $A_x - P_x, A_y$

(Remarquons que $A_+(1)$ et $A_-(1)$ sont conjuguées de $A(1)$).

$$ii) \quad \underline{(x, F)} = \underline{A_y + \varepsilon P_x}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

Une discussion similaire montre que x' est dans le plan (x, y) . Une transformation de Lorentz pure le long de l'axe des z et une transformation discrète correspondant à la rotation de π autour de l'axe des y , conduisent aux algèbres suivantes :

$$\begin{aligned} A^{\uparrow\downarrow}(2) &= A^{\uparrow}(1) \times A^{\downarrow}(1) \text{ engendrée par } A_x + P_y, A_y + P_x \\ A_{\alpha}^{\uparrow\downarrow}(2) &= A_{\alpha}^{\uparrow}(1) \times A^{\downarrow}(1) \text{ engendrée par } A_x + P_y, A_y + P_x \\ &\quad + \alpha P_y \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

(Remarquons que $A_{\alpha}^{\uparrow}(1)$ est conjuguée de $A^{\uparrow}(1)$).

B - Algèbres non abéliennes

Les relations (VI-2) et (VI-6) donnent

$$F x' - F' x = x' \quad (VI-9)$$

$$F \wedge F' = F' \quad (VI-10)$$

Cette dernière relation implique nécessairement $F \neq 0$. Nous avons à considérer deux cas, suivant que $F' = 0$ ou $F' \neq 0$.

.../...

i) $F' = 0$

Par une conjugaison, le générateur (x, F) peut se mettre sous la forme d'un élément de la première colonne du tableau (V-4). De plus, la relation (VI-5) devient

$$Fx' = x' \quad (VI-11)$$

En utilisant § 3 de l'appendice D, nous avons seulement à considérer des (x, F) de la forme J_f , K_z et $\sigma K_z + P_y$, $\sigma > 0$.

En définitive, nous obtenons les algèbres :

$$T^0(1) \supset F_f \quad \text{engendrée par } P_t - P_z, J_f$$

$$T^0(1) \supset L(1,1) \quad \text{engendrée par } P_t - P_z, K_z$$

$$T^0(1) \supset V_\sigma \quad \text{engendrée par } P_t - P_z, \sigma K_z + P_y, \sigma > 0$$

ii) $F' \neq 0$

Utilisant encore le tableau (III-2), nous pouvons choisir F et F' comme étant respectivement K_z et A_x . La relation (VI-9) montre que x' appartient à l'hyperplan engendré par F et F' . De plus, une translation convenablement choisie $(a, \mathcal{J})$ transformera x en $x_1 = x - Fa$ et x' en $x'_1 = x' - F'a$, x'_1 correspondant à la direction du genre lumière du plan de F n'appartenant pas au plan de F' . Par suite $Fx'_1 = -x'_1$ de la relation (VI-9), on déduit

$$x'_1 = 0, \quad F'x_1 = 0$$

Par une translation qui stabilise F' , nous obtenons, en définitive, les algèbres :

$$S(1) \quad \text{engendrée par } K_z, A_x$$

$$S_\sigma(1) = V_\sigma \supset A(1) \quad \text{engendrée par } \sigma K_z + P_y, A_x$$

.../...

Dim $\mathcal{A}$	Algèbres symorphes	Algèbres nonsymorphes	
		ALGÈBRES ABELIENNES (ref [6] : $(g_1)^2$, ref [7] : $2g_1$)	
2	$T^+(2)$	$\{P_t, P_z\}$	
	$T^0(2)$	$\{P_t - P_z, P_x\}$	
	$T^-(2)$	$\{P_x, P_y\}$	
1	$\mathbb{K} T^+(1) \times SO(2)$	$\{P_t, J_z\}$	$T^-(1) \times A^-(1)$
	$T^0(1) \times SO(2)$	$\{P_t - P_z, J_z\}$	$T^0(1) \times A^+(1)$
	$\mathbb{K} T^-(1) \times SO(2)$	$\{P_z, J_z\}$	$T^0(1) \times A^-(1)$
	$\mathbb{K} T^-(1) \times L(1, 1)$	$\{P_x, K_z\}$	
	$T^0(1) \times A(1)$	$\{P_t - P_z, A_y\}$	
	$\mathbb{K} T^-(1) \times A(1)$	$\{P_x, A_y\}$	
0	$SO(2) \times L(1, 1)$	$\{J_z, K_z\}$	
	$A(2)$	$\{A_x, A_y\}$	
		$\{A_y, A_x + P_x\}$	
		$\{A_x + P_x, A_y + P_y\}$	$\alpha \neq 0$
ALGÈBRES $S(1)$ (ref [6] et [7] : g_2)			
2			
1	$T^0(1) \boxtimes F_f$	$\{P_t - P_z, J_f\}$	$\sigma > 0$
	$T^0(1) \boxtimes L(1, 1)$	$\{P_t - P_z, K_z\}$	
0	$S(1)$	$\{K_z, A_x\}$	$\sigma > 0$

Tableau (VI-1) : Sous algèbres de $\mathfrak{G}$ de dimension 2

Dans ce tableau, les sous-groupes qui sont précédés d'un $\mathbb{K}$ sont stabilisateurs d'orbites coadjointes de $\mathfrak{P}$ (ref [8]).

2 - ALGÈBRES DE DIMENSION 3

La classification des classes d'algèbres de Lie de dimension 3 peut être obtenue d'une façon similaire à celle des sous algèbres de dimension 2. Rappelons d'abord qu'il existe onze algèbres de Lie réelles, non isomorphes [23], [33], [54]. Dans le tableau (VI-2), nous notons par $\{e, f, g\}$ une base pour une algèbre de Lie de dimension 3 et par $[,]$ le crochet de Lie.

	$[e, f] =$	$[e, g] =$	$[f, g] =$	Notations de la ref [23]	Notations de la ref [54]
Algèbre abélienne T(3)	0	0	0	$(g_1)^3$	$3g_1$
Algèbre de Weyl W(1)	g	0	0	$g_{3,1}$	$g_{3,1}$
T(1) x S(1)	f	0	0	$g_1 \times g_2$	$g_2 \times g_1$
Th $_{\lambda}$ (2) $ \lambda > 1$	λf	g	0	$g_{3,2}(\lambda); \lambda > 1$	$g_{3,4}(\frac{1}{\lambda}); \lambda > 1$
E(1,1)	-f	g	0	$g_{3,2}(-1)$	$g_{3,4}(-1)$
Th(2)	f	g	0	$g_{3,2}(1)$	$g_{3,3}$
Jor(2)	f	g+f	0	$g_{3,3}$	$g_{3,2}$
S $_{\alpha}$ (2) $(\sin \alpha > 0)$	$\sin \frac{\alpha}{2} f + \cos \frac{\alpha}{2} g$	$-\cos \frac{\alpha}{2} f + \sin \frac{\alpha}{2} g$	0	$g_{3,4}(\alpha); \alpha > 0$	$g_{3,5}(\alpha); \alpha > 0$
E(2)	g	-f	0	$g_{3,4}(0)$	$g_{3,5}(0)$
SO(3)	g	-f	e		$g_{3,7}$
SO(2,1)	g	-f	-e		$g_{3,6}$

Tableau (VI-2)

Algèbres réelles de dimension 3

.../...

A - Algèbres abéliennes

Soit $A = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ une telle algèbre; nous pouvons étudier ces algèbres suivant la dimension de $\mathcal{C}_A$. Remarquons que $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A) = \dim A - \dim \mathcal{C}_A = 3 - \dim \mathcal{C}_A$.

Par une conjugaison de Lorentz convenablement choisie, on peut mettre $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ sous une forme "canonique", c'est-à-dire correspondant à une base donnée dans la première colonne du tableau (III-4). Puisqu'il n'existe aucune sous-algèbre abélienne de Lorentz de dimension 3, nous n'avons à considérer que les cas $1 \leq \dim \mathcal{C}_A \leq 3$.

i) $\dim \mathcal{C}_A = 1$

Les possibilités pour $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ sont $SO(2) \times L(1,1)$ et $A(2)$ engendrés respectivement par J_z, K_z et A_x, A_y . La forme de $\mathcal{C}_A$ est alors donnée dans la deuxième colonne du même tableau. Comme les algèbres sont abéliennes, nous pouvons immédiatement remarquer que le cas correspondant à $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A = A(2)$ et $\mathcal{C}_A$ engendrés par $P_t - P_z$, est le seul à considérer. Il est alors intéressant de remarquer que, dans ce cas, A peut être écrit comme le produit direct $\mathcal{C}_A \times (\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A)$. De plus, le tableau (III-3) nous dit que le stabilisateur de $A(2)$ est $S(2)$ qui stabilise aussi $P_t - P_z$. Par suite, $\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ peut être choisi parmi les sous-algèbres de dimension 2 données dans le tableau (VI-1). Les algèbres obtenues sont données dans le tableau (VI-3) (algèbre abélienne $\dim \mathcal{C}_A = 1$).

.../...

$$\text{ii) } \underline{\dim \mathcal{C}_A = 2}$$

$\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ peut être choisie comme l'une des algèbres de Lie de dimension 1 données dans le tableau (III-4). Le même tableau nous donne les sous-algèbres de translation de dimension 2 invariantes sous un sous-groupe de Lorentz de dimension 1.

Utilisant l'abélianité de l'algèbre, et faisant des conjugaisons convenablement choisies, nous trouvons les algèbres données dans le tableau (VI-3) (algèbre abélienne $\dim \mathcal{C}_A = 2$).

$$\text{iii) } \underline{\dim \mathcal{C}_A = 3}$$

Ce cas a déjà été étudié, et se trouve résumé dans le tableau (III-1). Nous rappelons les résultats dans le tableau (VI-3).

B - Les algèbres W(1)

La classification des algèbres de Lorentz montre qu'il n'existe pas de sous-algèbre de dimension 3 isomorphe à W(1). Ainsi, il ne nous reste plus qu'à étudier les cas où $1 \leq \dim \mathcal{C}_A \leq 2$, une algèbre ne contenant que des translations étant nécessairement abélienne.

$$\text{i) } \underline{\dim \mathcal{C}_A = 1}$$

A partir des relations de commutation données dans le tableau (VI-2), nous pouvons facilement déduire que g engendre $\mathcal{C}_A$, et que $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ est abélienne. De plus, le tableau (VI-1) montre que $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ est l'algèbre A(2) et que $\mathcal{C}_A$

est engendrée par $P_t - P_z$. Par des transformations du stabilisateur de $A(2)$, nous obtenons les algèbres non-conjuguées données dans le tableau (VI-3) (algèbres - $W(1)$ - $\dim \mathcal{G}_A = 1$).

$$\text{ii) } \underline{\dim \mathcal{G}_A = 2}$$

Soit e le générateur n'appartenant pas à $\mathcal{G}_A$.

$$e = (x, F) ; f = (y, 0) ; g = (z, 0)$$

Les relations de commutation donnent :

$$\begin{cases} F_y = z \\ F_z = 0 \end{cases} \quad (\text{VI-12})$$

Ainsi, F est un tenseur plan, et z appartient à l'intersection des plans des tenseurs F et F^* . Par suite, du tableau (D-1), il découle que F correspond à un élément conjugué de A_y , et g est proportionnel à $P_t - P_z$. Le stabilisateur de A_y , stabilisant aussi $P_t - P_z$, e peut être choisi dans le tableau (V-4). En définitive, les algèbres obtenues sont données dans le tableau (VI-3) (algèbre - $W(1)$ - $\dim \mathcal{G}_A = 2$).

C - Les algèbres $T(1) \times S(1)$

Remarquons, d'abord, que comme dans les cas précédents $1 \leq \dim \mathcal{G}_A \leq 2$. De plus, il est toujours possible, par un automorphisme interne, de transformer la sous-algèbre $S(1)$ en l'une des sous-algèbres données dans la deuxième partie du tableau (VI-1). Il est alors facile de choisir le générateur de $T(1)$ qui commute avec $S(1)$. De façon plus précise

$$i) \dim \mathcal{C}_A = 1$$

Nous notons par $\mathcal{L}_A, \mathcal{L}'_A, \mathcal{C}_A, \mathcal{C}'_A, \mathcal{M}_A$ les diverses parties de la sous-algèbre $\mathcal{A}$, par $\mathcal{L}_{S(1)}, \mathcal{L}'_{S(1)}, \mathcal{C}_{S(1)}, \mathcal{C}'_{S(1)}, \mathcal{M}_{S(1)}$, les différentes parties des sous-algèbres isomorphes à $S(1)$ qui sont incluses dans $\mathcal{A}$. Deux cas sont possibles:

$\alpha)$ $\dim \mathcal{C}_{S(1)} = 0$. Il s'ensuit que $\mathcal{L}_{S(1)} + \mathcal{L}'_{S(1)} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$, engendré par K_z, A_x . Par suite, $T(1)$ doit être engendré par P_y . Nous obtenons une seule classe d'algèbre $T^-(1) \times S(1)$.

$\beta)$ $\dim \mathcal{C}_{S(1)} = 1$. $\mathcal{L}_{S(1)} + \mathcal{L}'_{S(1)}$ est engendré par K_z ou J_f . Dans ce cas, $T(1)$ ne peut être une algèbre de translation et nous obtenons la classe d'algèbre $T^0(1) \equiv [SO(2) \times L(1,1)]$ engendrée par $P_t - P_z, J_z, K_z$.

$$ii) \dim \mathcal{C}_A = 2$$

Le seul générateur de $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ est K_z . Nous obtenons les algèbres données dans le tableau (VI-3) (algèbre $T(1) \times S(1) - \dim \mathcal{C}_A = 2$).

D - Les algèbres $Th_\lambda(2), |\lambda| \dots$

Une discussion simple montre qu'il n'existe pas de telle sous-algèbre dans l'algèbre de Poincaré : en effet, il n'en n'existe pas dans Lorentz. Nous avons donc seulement à considérer les cas $1 \leq \dim \mathcal{C}_A \leq 2$. Remarquons qu'une telle algèbre contient deux algèbres $S(1)_1$ et $S(1)_2$ isomorphes à $S(1)$ engendrées respectivement par e, f et e, g .

$$i) \dim \mathcal{G}_A = 1$$

Nous pouvons choisir $\mathcal{L}_{S(1)_1} + \mathcal{L}'_{S(1)_1}$ engendrée par K_z et A_x , mais il n'existe pas de translation satisfaisant aux relations de commutation.

$$ii) \dim \mathcal{G}_A = 2$$

Nous pouvons choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par K_z , mais il n'existe pas de translation f et g satisfaisant les relations de commutation.

E - Les algèbres $E(1,1)$

Des considérations similaires à celles du cas D, nous permettent de restreindre l'étude au cas $\dim \mathcal{G}_A = 2$, et $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par K_z ou J_F . Ces algèbres sont données dans le tableau (VI-3).

F - Les algèbres $Th(2)$

Il existe une telle sous-algèbre dans l'algèbre de Lorentz. Aussi, nous devons étudier les cas correspondant à $0 \leq \dim \mathcal{G}_A \leq 2$.

$$i) \dim \mathcal{G}_A = 0$$

Par une conjugaison de Lorentz, on peut choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par K_z, A_x, A_y . Nous notons $f = (x, F)$, $g = (y, F^*)$ et $e = (z, F')$ où F et F' correspondent respectivement à A_x et K_z . Par action d'une translation et en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} F_y - F_x^* = 0 \\ F_x' - F_z = x \\ F_y' - F_z^* = y \end{array} \right. \quad (\text{VI-13})$$

nous obtenons une seule algèbre, $\text{Th}(2)$, engendrée par K_z, A_x, A_y .

$$\text{ii) } \underline{\dim \mathcal{G}_A = 1}$$

Une telle algèbre contient deux sous-algèbres $S(1)_1$ et $S(1)_2$ isomorphes à $S(1)$ engendrées par e, f et e, g . Nous pouvons prendre $S(1)_1$ engendrée par K_z, A_x ou par $\sigma K_z + P_y, A_x$. Par action d'une translation et en résolvant les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} F_y = 0 \\ F_x' - F_z = x \\ F_y' = y \end{array} \right. \quad (\text{VI-14})$$

nous obtenons deux types d'algèbres donnés dans le tableau (VI-3) (algèbre $\text{Th}(2)$ - $\dim \mathcal{G}_A = 1$).

$$\text{iii) } \underline{\dim \mathcal{G}_A = 2}$$

Les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x' = x \\ F_y' = y \end{array} \right. \quad (\text{VI-15})$$

montrent qu'il n'existe aucune sous-algèbre de ce type.

G - Les algèbres Jor(2)

Il suffit d'étudier les cas correspondant à $1 \leq \dim \mathcal{C}_A \leq 2$. Le générateur e ne peut engendrer une translation et f doit être le générateur d'une translation (sinon, g serait une translation et la deuxième relation de commutation ne serait pas vérifiée). Les relations de commutation du tableau (VI-2) montrent que e et f engendrent une algèbre isomorphe à $S(1)$. $\mathcal{L}_{S(1)} + \mathcal{L}'_{S(1)}$ est engendrée par K_z ou J_f à une conjugaison près, et f est proportionnel à $P_t - P_z$. Finalement, nous obtenons deux types d'algèbres dans le tableau (VI-3).

H - Les algèbres $S_\alpha(2)$ ($\sin \alpha \neq 0$)

Nous notons $e = (x_1, F_1)$, $f = (x_2, F_2)$ et $g = (x_3, F_3)$. Il est clair, d'après les relations de commutation que $F_1 \neq 0$ et que $\dim \mathcal{C}_A \neq 1$.

De plus, en résolvant les équations

$$\begin{cases} F_1 x_2 = \sin \frac{\alpha}{2} x_2 + \cos \frac{\alpha}{2} x_3 \\ F_1 x_3 = -\cos \frac{\alpha}{2} x_2 + \sin \frac{\alpha}{2} x_3 \end{cases} \quad (\text{VI-16})$$

nous déduisons que x_1 et x_2 doivent être nuls.

Finalement, nous devons considérer le cas $\dim \mathcal{C}_A = 0$. Nous pouvons alors choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par J_f, A_x, A_y . Par une translation, on peut prendre $x_3 = 0$ et les équations (VI-16) assurent que nous avons seulement l'algèbre symorphe $S_\alpha(2)$ engendrée par J_α, A_x, A_y .

I - Les algèbres E(2)

Les relations de commutation montrent que $\dim \mathcal{C}_A$ peut être 0 ou 2.

$$i) \quad \underline{\dim \mathcal{C}_A = 0}$$

Nous pouvons choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par J_z, A_x, A_y . Ecrivant $f = (x, F)$, $g = (y, F^*)$ et $e = (z, F')$ où F et F' correspondent respectivement à A_x et J_z , nous avons à résoudre les équations

$$\begin{cases} F_y - F^*_x = 0 \\ F'_x - F_z = y \\ F'_y - F^*_z = -x \end{cases}$$

En utilisant une translation, nous obtenons à une transformation de Lorentz pure près, les trois types d'algèbres donnés dans le tableau (VI-3).

$$ii) \quad \underline{\dim \mathcal{C}_A = 2}$$

Nous pouvons toujours choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ engendrée par J_z ou J_f . Par une conjugaison, $e = (z, F')$ peut être pris comme un générateur du tableau (V-4). En utilisant les sous-espaces invariants de dimension 2 donnés dans le tableau, nous obtenons les algèbres données dans le tableau (VI-3) (algèbre E(2) - $\dim \mathcal{C}_A = 2$).

J - Les algèbres SO(3)

Etant donné une algèbre $\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$, où $\mathcal{C}$ est abélienne, toute sous-algèbre $\mathcal{H}$, de dimension 3, égale à son algèbre dérivée $\mathcal{H}'$, ne peut contenir d'éléments de $\mathcal{C}$.

Il est clair que dans notre cas, $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ peut être choisie comme engendrée par J_x, J_y, J_z . Par suite, $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de $Ar^+(3)$ engendrée par $\vec{J}, \vec{P}, P_t$. En remarquant que $Ar^+(3)$ peut être écrit $E(3) \times R$, on déduit que l'algèbre $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de $E(3)$. Ceci montre que nous obtenons une seule classe d'algèbre isomorphe à $SO(3)$, caractérisée par l'algèbre engendrée par J_x, J_y, J_z .

X - Les algèbres $SO(2,1)$

A partir du même raisonnement dans lequel $Ar^+(3)$ est remplacé par $Ar^+(2,1)$ et $E(3)$ par $E(2,1)$, nous obtenons l'algèbre $SO(2,1)$ engendrée par J_y, K_x, K_y .

Tous ces résultats sont regroupés dans le tableau (VI-3). Ce tableau est divisé en sous-tableaux, chacun correspondant à une classe d'isomorphisme. Les sous-algèbres sont classées en symorphes et non-symorphes et suivant la dimension de $\mathcal{G}_A$.

Dim A	Algèbres symorphes		Algèbres nonsymorphes	
ALGEBRES ABELIENNES				
3	$T^+(3)$ $T^0(3)$ $T^-(3)$	$\{P_t, P_x, P_y\}$ $\{P_t - P_z, P_x, P_y\}$ $\{P_x, P_y, P_z\}$		
2	$T^+(2) \times SO(2)$ $T^-(2) \times L(1,1)$ $T^0(2) \times A(1)$	$\{P_t, P_z, J_z\}$ $\{P_x, P_y, K_z\}$ $\{P_t - P_z, P_y, A_x\}$	$T^0(2) \times A^-(1)$	$\{P_t - P_z, P_y, A_x + P_t + P_z\}$
1	$T^0(1) \times A(2)$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y\}$	$T^0(1) \times A_\varepsilon(2)$ $T^0(1) \times A^{\uparrow\downarrow}(2)$ $T^0(1) \times A_\alpha^{\uparrow\downarrow}(2)$	$\{P_t - P_z, A_x + \varepsilon P_x, A_y\} \quad \varepsilon = \pm 1$ $\{P_t - P_z, A_x + P_y, A_y + P_x\}$ $\{P_t - P_z, A_x + P_v, A_v + P_x + \alpha P_v\} \quad \alpha \neq 0$

ALGÈBRES W(1)

2	$T^0(2) \square A(1)$ $\{P_t - P_z, P_y, A_y\}$ $T_\alpha^0(2) \square A(1)$ $\{P_t - P_z, P_y + \alpha P_x, A_y\}$ $\alpha \neq 0$	$T^0(2) \square A^\uparrow(1)$ $T^0(2) \square A^\downarrow(1)$ $T^0(2) \square A^-(1)$ $T_\alpha^0(2) \square A^\uparrow(1)$ $T_\alpha^0(2) \square A^\downarrow(1)$ $T_\alpha^0(2) \square A^-(1)$	$\{P_t - P_z, P_y, A_y + P_x\}$ $\{P_t - P_z, P_y, A_y - P_x\}$ $\{P_t - P_z, P_y, A_y + P_t + P_z\}$ $\{P_t - P_z, P_y + \alpha P_x, A_y + P_x\}$ $\alpha \neq 0$ $\{P_t - P_z, P_y + \alpha P_x, A_y - P_x\}$ $\alpha \neq 0$ $\{P_t - P_z, P_y + \alpha P_x, A_y + P_t + P_z\}$ $\alpha \neq 0$	
1		$[T^0(1) \times A^\downarrow(1)] \square A(1)$ $[T^0(1) \times A^\uparrow(1)] \square A(1)$ $[T^0(1) \times A_\alpha^\downarrow(1)] \square A(1)$ $[T^0(1) \times A_\alpha^\uparrow(1)] \square A(1)$ $[T^0(1) \times A_\alpha^\downarrow(1)] \square A^\alpha(1)$ $[T^0(1) \times A^\downarrow(1)] \square A^\downarrow(1)$ $[T^0(1) \times A^\uparrow(1)] \square A^\alpha(1)$ $[T^0(1) \times A^\uparrow(1)] \square A^\uparrow(1)$ $[T^0(1) \times A^\downarrow(1)] \square A^{(\alpha, \beta)}(1)$ $[T^0(1) \times A^\uparrow(1)] \square A^{(\alpha, \beta)}(1)$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y - P_x\}$ $\{P_t - P_z, A_x, A_y + P_x\}$ $\{P_t - P_z, A_x, A_y - P_x + \alpha P_y\}$ $\alpha \neq 0$ $\{P_t - P_z, A_x, A_y + P_x + \alpha P_y\}$ $\alpha \neq 0$ $\{P_t - P_z, A_x + P_y, A_y + \alpha P_x\}$ $\alpha \neq 0, \pm 1$ $\{P_t - P_z, A_x + P_y, A_y - P_x\}$ $\{P_t - P_z, A_x - P_y, A_y + \alpha P_x\}$ $\alpha \neq 0, \pm 1$ $\{P_t - P_z, A_x - P_y, A_y + P_x\}$ $\{P_t - P_z, A_x + P_y, A_y + \alpha P_x + \beta P_y\}$ $\alpha, \beta \neq 0, \alpha \neq \pm 1$ $\{P_t - P_z, A_x - P_y, A_y + \alpha P_x + \beta P_y\}$ $\alpha, \beta \neq 0, \alpha \neq -1$	

TABLEAU VI-3

Sous-algèbres de Lie de $\mathcal{J}$ de dimension 3 (début)

... / ...

ALGÈBRES $T(1) \times S(1)$

2	$T^+(2) \supset L(1,1)$	$\{P_t - P_z, P_x, K_z\}$	$T^+(2) \supset V_0$	$\{P_t - P_z, P_x, \sigma K_z + P_y\}$	$\sigma > 0$
1	$T^-(1) \times S(1)$	$\{P_y, K_z, A_x\}$			
	$T^-(1) \supset [SO(2) \times L(1,1)]$	$\{P_t - P_z, J_z, K_z\}$			

ALGÈBRES $E(1,1)$

2	$T^+(2) \supset F_f$	$\{P_t, P_z, J_f\}$	$T^+(2) \supset V_0$	$\{P_t, P_z, \sigma K_z + P_y\}$	$\sigma > 0$
	$T^+(2) \supset L(1,1)$	$\{P_t, P_z, K_z\}$			

ALGÈBRES $Jor(2)$

1			$Jor_\sigma(2)$	$\{P_t - P_z, A_y, \sigma K_z + P_y\}$	$\sigma > 0$
			$Jor_{\sigma, \alpha}(2)$	$\{P_t - P_z, A_x, \sigma K_z + P_x + \alpha P_y\}$	$\sigma > 0$ $\alpha \neq 0$

ALGÈBRES $Th(2)$

1	$T^-(1) \supset S(1)$	$\{P_t - P_z, K_z, A_x\}$	$T^-(1) \supset S_0(1)$	$\{P_t - P_z, \sigma K_z + P_y, A_x\}$	$\sigma > 0$
0	$Th(2)$	$\{K_z, A_x, A_y\}$			

ALGÈBRES $S_\alpha(2)$

0	$S_\alpha(2)$	$\{J_\alpha, A_x, A_y\}$			
---	---------------	--------------------------	--	--	--

ALGÈBRES $E(2)$

2	$T^-(2) \supset SO(2)$	$\{P_x, P_y, J_z\}$	$T^-(2) \supset H_\omega^+$	$\{P_x, P_y, \omega J_z + P_t\}$	$\omega > 0$
	$T^-(2) \supset F_f$	$\{P_x, P_y, J_f\}$	$T^-(2) \supset H_\omega^-$	$\{P_x, P_y, \omega J_z + P_z\}$	$\omega \neq 0$
			$T^-(2) \supset H^\uparrow$	$\{P_x, P_y, J_z - (P_t - P_z)\}$	
			$T^-(2) \supset H^\downarrow$	$\{P_x, P_y, J_z + (P_t - P_z)\}$	
0	$LE(2)$	$\{J_z, A_x, A_y\}$	$A(2) \supset H^\uparrow$	$\{A_x, A_y, J_z - (P_t - P_z)\}$	
			$A(2) \supset H^\downarrow$	$\{A_x, A_y, J_z + (P_t - P_z)\}$	

ALGÈBRES $SO(3)$

0	$SO(3)$	$\{J_x, J_y, J_z\}$			
---	---------	---------------------	--	--	--

ALGÈBRES $SO(2,1)$

0	$L(2,1)$	$\{J_y, K_x, K_z\}$			
---	----------	---------------------	--	--	--

TABLEAU VI-3

Sous algèbres de $\mathfrak{g}$ de dimension 3 (fin)

.../...

VII - SOUS-ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSIONS 4, 5 ET 6

Nous utiliserons, pour la recherche des sous-algèbres de dimensions 4, 5 et 6, une méthode différente, vu le grand nombre de classes d'isomorphismes pour la dimension 4 [23] [54] et, a fortiori, pour les dimensions 5 et 6. D'autre part, la classification des algèbres de dimensions 5 et 6 n'est pas complètement connue. En fait, le nombre, relativement petit, de sous-algèbres de Poincaré de telles dimensions ne nécessite pas la connaissance de cette classification. Dans la méthode utilisée, les sous-algèbres seront regroupées en classes de conjugaisons avant de l'être en classes d'isomorphismes. Le dernier problème est la classification de ces algèbres à un isomorphisme près. Pour les algèbres de dimension 4, nous pouvons comparer les algèbres non conjuguées avec les algèbres du tableau (VII-1).

Les résultats concernant les algèbres de dimension 4 sont donnés dans le tableau (VII-2).

Pour les algèbres de dimensions 5 et 6, nous utiliserons une propriété simple des algèbres isomorphes. Considérons pour une algèbre $\mathcal{A}$, la suite dérivée

$$\mathcal{A} = D^0\mathcal{A} \supset D^1\mathcal{A} \supset \dots \supset D^k\mathcal{A} \supset \dots \quad (\text{VII-1})$$

où

$$D^k = [D^{k-1} / \quad , D^{k-1} \quad] \quad (\text{VII-2})$$

et la suite centrale

$$\mathcal{A} = C^0\mathcal{A} \supset C^1\mathcal{A} \supset \dots \supset C^k\mathcal{A} \supset \dots \quad (\text{VII-3})$$

avec

$$C^k = [C^{k-1}\mathcal{A} , \mathcal{A}] \quad (\text{VII-4})$$

.../...

Il est facile de remarquer que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux algèbres isomorphes, alors $D^k \mathcal{A}$ et $D^k \mathcal{B}$ sont isomorphes ; il en est de même pour $C^k \mathcal{A}$ et $C^k \mathcal{B}$.

Par suite, nous sommes assurés que deux algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas isomorphes s'il existe k et N tel que $\dim D^k \mathcal{A} \neq \dim D^k \mathcal{B}$ ou $\dim C^k \mathcal{A} \neq \dim C^k \mathcal{B}$.

Nous devons remarquer que si pour tout k , $\dim D^k \mathcal{A} = \dim D^k \mathcal{B}$ et $\dim C^k \mathcal{A} = \dim C^k \mathcal{B}$, cela n'entraîne pas que les algèbres soient isomorphes. Nous pouvons vérifier ceci sur l'exemple suivant.

Soit les deux algèbres: $\mathcal{A}$ engendrée par $K_z, A_x, A_y, P_y, P_t - P_z$ et $\mathcal{B}$ engendrée par $\sigma K_z + P_y, A_x, A_y, P_y, P_t - P_z$ ($\sigma \neq 0$). Pour chaque k , $D^k \mathcal{A}$ et $D^k \mathcal{B}$ ont même dimension, de même que $C^k \mathcal{A}$ et $C^k \mathcal{B}$. Cependant, dans $\mathcal{A}$, $\text{ad} K_z$ induit dans $D^1 \mathcal{A}$ l'identité, et il n'existe pas d'élément de $\mathcal{B}$ qui induise l'identité dans $D^1 \mathcal{B}$. Ainsi, ces deux algèbres ne sont pas isomorphes.

Nous pouvons résumer la classification de ces sous-algèbres, à une conjugaison près, en remarquant que si $\mathcal{A} = \mathcal{T}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ est une sous-algèbre, la dimension de $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ ne doit pas changer sous l'action d'un automorphisme intérieur. De plus, l'algèbre $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ peut être mise sous "forme canonique", c'est-à-dire on peut choisir $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ comme l'une des algèbres donnée dans la première colonne du tableau (III-4). Les autres colonnes fournissent les $\mathcal{T}_A$ possibles pour $\mathcal{A}$. Ainsi, nous avons, pour chaque dimension de $\mathcal{A}$, à rechercher successivement les sous-algèbres $\mathcal{A}$ pour lesquelles $\dim \mathcal{T}_A = 0, 1, 2, \dots, 4$,

.../...

la dimension correspondante de $\mathcal{A}_A + \mathcal{A}'_A$ étant $\dim \mathcal{H} - \dim \mathcal{G}_A$.

Dans ce qui suit, nous ne donnerons pas les longues considérations qui consistent, en particulier, en l'utilisation du tableau (III-4), et nous n'explicitons pas les automorphismes internes, qui assurent que toutes les algèbres des tableaux suivants ne sont pas conjuguées.

Les résultats sont regroupés dans les tableaux (VII-2), (VII-3) et (VII-4).

	$[e, f]$	$[e, g]$	$[e, h]$	$[f, g]$	$[f, h]$	$[g, h]$
* Algèbre abélienne $T(4)$	0	0	0	0	0	0
* $T(1) \times W(1)$	g	0	0	0	0	0
* $T(2) \times S(1)$	f	0	0	0	0	0
* $g(4, 1)$	0	g	h	h	0	0
* $S(2)$	0	g	h	-h	g	0
* $g_{4, 3}$	g	h	0	0	0	0
$g_{4, 4}$	g	0	h	0	0	0
$S(1) \times S(1)$	f	0	0	0	0	h
$T(1) \times Th_{\lambda}(2) ; \lambda > 1$	λf	g	0	0	0	0
* $T(1) \times E(1, 1) = Ar(1, 1)$	-f	g	0	0	0	0
* $T(1) \times Th(2)$	f	g	0	0	0	0
* $T(1) \times Jor(2)$	f	g+f	0	0	0	0
$T(1) \times S_{\alpha}(2) \quad (\sin \alpha > 0)$	$\sin \frac{\alpha}{2} f + \cos \frac{\alpha}{2} g$	$-\cos \frac{\alpha}{2} f + \sin \frac{\alpha}{2} g$	0	0	0	0
* $Ar(2) = T(1) \times E(2)$	g	-f	0	0	0	0
* $T(1) \times SO(3)$	g	-f	0	e	0	0
* $T(1) \times SO(2, 1)$	g	-f	0	-e	0	0
$Th_{\alpha, \beta}(3) \quad \begin{matrix} -1 < \alpha \leq \beta < 0 \\ -1 \leq \alpha < 0 ; 0 < \beta \leq 1 \\ 0 < \alpha \leq \beta \leq 1 ; \alpha, \beta \neq 1 \end{matrix}$	f	αg	βh	0	0	0
* $Th(3)$	f	g	h	0	0	0
* $g_{4, 6}(\alpha) \quad \alpha \neq 0$	αf	g+h	h	0	0	0
$Jor(3)$	f+g	g+h	h	0	0	0
* $g_{4, 8}(\alpha, \beta) \quad \alpha > 0$	αf	$\beta g - h$	g+ βh	0	0	0
$g_{4, 9}(\alpha) \quad 0 < \alpha < 2 ; \alpha \neq 1$	$(\alpha - 1)f$	g	αh	h	0	0
$Osc(0, 1)$	-f	g	0	h	0	0

Tableau VII-1

Algèbres de Lie réelles de dimension 4 non isomorphes (début)

$g_{4,10}$	$f+g$	g	$2h$	h	0	0
$g_{4,11}(\alpha) ; \alpha \neq 0$	$f-g$	$f+g$	$2h$	h	0	0
$*Osc(1,0)$	$-g$	f	0	h	0	0

Tableau VII-1

Algèbres de Lie réelles de dimension 4 non isomorphes (fin)

Les symboles $g_{4,3}$, $g_{4,4}$, $g_{4,6}(\alpha)$, $g_{4,8}(\alpha, \beta)$, $g_{4,9}(\alpha)$, $g_{4,10}$ et $g_{4,11}(\alpha)$ sont ceux de la référence (23).

Le symbole $*$ signifie que ce type d'algèbres existe dans les sous-algèbres de $\mathcal{P}$.

Dim $\mathcal{A}$	Algèbres symorphes	Algèbres nonsymorphes
-------------------	--------------------	-----------------------

ALGÈBRE ABELIENNE

4	$T(4) \quad \{P_t, P_x, P_y, P_z\}$	
---	-------------------------------------	--

ALGÈBRES $T(1) \times W(1)$

3	$T^0(3) \oplus A(1) \quad \{P_x, P_y, P_t - P_z, A_y\}$	$T^0(3) \oplus A^-(1) \quad \{P_x, P_y, P_t - P_z, A_y + P_t + P_z\}$
2	$T^0(2) \oplus A(2) \quad \{P_y, P_t - P_z, A_x, A_y\}$	$[T^0(2) \oplus A^+(1)] \oplus A(1) \quad \{P_y, P_t - P_z, A_y + P_x, A_x\}$ $[T^0(2) \oplus A^+(1)] \oplus A(1) \quad \{P_y, P_t - P_z, A_y - P_x, A_x\}$

ALGÈBRE $T(2) \times S(1)$

3	$T^0(3) \oplus L(1,1) \quad \{P_x, P_y, P_t - P_z, P_z\}$	
---	---	--

... / ...

ALGÈBRES $Ar(1,1)=T(1)\times E(1,1)$

3	$Ar^-(1,1)$	$\{P_t, P_x, P_z, K_z\}$	$Ar^-_{\sigma}(1,1)$	$\{P_t, P_x, P_z, K_z + P_y\}$	$\sigma > 0$
2	$E(1,1) \times SO(2)$	$\{P_t, P_z, K_z, J_z\}$			

ALGÈBRE $T(1) \times Jor(2)$

2			$T^-(1) \times Jor_{\sigma}(2)$	$\{P_y, P_t - P_z A_x, \sigma K_z + P_x\}$	$\sigma > 0$
---	--	--	---------------------------------	--	--------------

ALGÈBRE $T(1) \times Th(2)$

2	$[T^{\circ}(1) \sqcup S(1)] \times T^-(1)$	$\{P_y, P_t - P_z, A_x, K_z\}$			
---	--	--------------------------------	--	--	--

ALGÈBRES $Ar(2)=T(1) \times E(2)$

3	$T^{\circ}(3) \sqcup SO(2)$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z, J_z\}$	$T^{\circ}(3) \sqcup H^{\uparrow}$	$\{P_x, P_y, P_t + P_z, J_z - (P_t - P_z)\}$	
	$T^+(3) \sqcup SO(2)$	$\{P_t, P_x, P_y, J_z\}$	$T^{\circ}(3) \sqcup H^{\downarrow}$	$\{P_x, P_y, P_t + P_z, J_z + (P_t - P_z)\}$	
	$T^-(3) \sqcup SO(2)$	$\{P_x, P_y, P_z, J_z\}$	$T^+(3) \sqcup H^+_{\omega}$	$\{P_t, P_x, P_y, \omega J_z + P_z\}$	$\omega \neq 0$
			$T^-(3) \sqcup H^-_{\omega}$	$\{P_x, P_y, P_z, \omega J_z + P_t\}$	$\omega > 0$
2	$T^-(2) \sqcup [SO(2) \times L(1,1)]$	$\{P_x, P_y, J_z, K_z\}$			
1	$*T^{\circ}(1) \times L_E(2)$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y, J_z\}$			

ALGÈBRE $T(1) \times SO(3)$

1	$*T^+(1) \times SO(3)$	$\{P_t, J_x, J_y, J_z\}$			
---	------------------------	--------------------------	--	--	--

ALGÈBRE $T(1) \times SO(2,1)$

1	$*T^-(1) \times SO(2,1)$	$\{P_y, J_y, K_x, K_z\}$			
---	--------------------------	--------------------------	--	--	--

ALGÈBRES $g_{4,1}$

2	$T^{\circ}(2) \sqcup S(1)$	$\{P_x, P_t - P_z, A_x, K_z\}$	$T^{\circ}(2) \sqcup S_{\sigma}(1)$	$\{P_x, P_t - P_z, A_x, \sigma K_z + P_y\}$	$\sigma > 0$
	$T^{\circ}_{\alpha}(2) \sqcup S(1)$	$\{P_x + \alpha P_y, P_t - P_z, A_x, K_z\}$	$T^{\circ}_{\alpha}(2) \sqcup S_{\sigma}(1)$	$\{P_x + \alpha P_y, P_t - P_z, A_x, \sigma K_z + P_y\}$	$\sigma > 0 \quad \alpha \neq 0$

TABLEAU VII-2 : Sous algèbres connexes de dimension 4

(début)

...

ALGEBRE S(2)

0	S(2)	$\{J_z, K_z, A_x, A_y\}$
---	------	--------------------------

ALGEBRES $g_{4,3}$

3	$T^+(3) \oplus A(1)$	$\{P_t, P_y, P_z, A_y\}$	$T^+(3) \oplus A^\uparrow(1)$ $T^+(3) \oplus A^\downarrow(1)$	$\{P_t, P_y, P_z, A_y + P_x\}$ $\{P_t, P_y, P_z, A_y - P_x\}$
2			$[T^0(2) \times A^-(1)] \oplus A(1)$ $[T^0(2) \times A^-(1)] \oplus A^\alpha(1)$	$\{P_x, P_t - P_z, A_x, A_y + P_t + P_z\}$ $\{P_x, P_t - P_z, A_x + \alpha P_y, A_y + P_t + P_z\}$ $\alpha \neq 0$

ALGEBRE Th(3)

1	Th(3)	$\{P_t - P_z, K_z, A_x, A_y\}$
---	-------	--------------------------------

ALGEBRE $g_{4,6}(\alpha)$

1		$[T^0(1) \times A(2)] \oplus V_\sigma$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y, \sigma K_z + P_x\}$	$\sigma > 0$
---	--	--	---	--------------

ALGEBRE $g_{4,8}(1,0)$

3	$T^0(2) \oplus F_f$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z, J_f\}$
---	---------------------	--------------------------------

ALGEBRE $g_{4,8}(\alpha, \alpha)$

1	$[T^0(1) \times A(2)] \oplus F_f$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y, J_f\}$
---	-----------------------------------	--------------------------------

ALGEBRE Osc(1,0)

1		$*Osc(1,0)^\uparrow$ $*Osc(1,0)^\downarrow$	$\{P_t - P_z, A_x - P_y, A_y + P_x, J_z\}$ $\{P_t - P_z, A_x + P_y, A_y - P_x, J_z\}$
---	--	--	--

TABLEAU VII-2 : Sous algèbres connexes de dimension 4 (fin)

Dans ce tableau, les sous-groupes précédés du signe * sont les stabilisateurs d'orbites coadjoints de $\mathfrak{g}$ (ref [1]).

.../...

Dim $\mathcal{C}_A$	Algèbres symorphes	Algèbres nonsymorphes
---------------------	--------------------	-----------------------

$$W(2) \quad [e, f] = [g, h] = k$$

3	$W(2)$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z, A_x, A_y\}$
---	--------	-------------------------------------

$$T(2) \times E(1, 1) \quad [e, f] = -f ; [e, g] = g$$

4	$T(4) \supset L(1, 1)$	$\{P_t, P_x, P_y, P_z, K_z\}$
---	------------------------	-------------------------------

$$T(2) \times E(2) \quad [e, f] = g ; [e, g] = -f$$

4	$T(4) \supset SO(2)$	$\{P_t, P_x, P_y, P_z, J_z\}$
---	----------------------	-------------------------------

$$T(1) \times g_{4,1} \quad [e, g] = g ; [e, h] = h ; [f, g] = h$$

3	$T^\circ(3) \supset S(1)$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z, A_x, K_z\}$
---	---------------------------	-------------------------------------

$$T(1) \times g_{4,3} \quad [e, f] = g ; [e, g] = h$$

4	$T(4) \supset A(1)$	$\{P_x, P_y, P_z, P_t, A_x\}$
---	---------------------	-------------------------------

$$g_{5,3} \quad [e, f] = g ; [e, g] = k ; [f, h] = k$$

3		$[T^\circ(3) \supset A^-(1)] \supset A(1)$ $\{P_x, P_y, P_t - P_z, A_x + (P_t + P_z), A_y\}$
---	--	---

$$E(2) \times S(1) \quad [e, f] = g ; [e, g] = -f ; [h, k] = k$$

3	$T^\circ(3) \supset [SO(2) \times L(1, 1)]$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z, J_z, K_z\}$
---	---	-------------------------------------

$$[e, g] = h ; [e, h] = -g ; [f, g] = g ; [f, h] = h ; [f, k] = k$$

1	$T^\circ(1) \supset S(2)$	$\{P_t - P_z, A_x, A_y, J_z, K_z\}$
---	---------------------------	-------------------------------------

$$[e, f] = f ; [e, g] = g ; [e, h] = h ; [g, k] = h$$

2	$T^\circ(2) \supset Th(2)$	$\{P_t - P_z, P_y, A_x, A_y, K_z\}$
---	----------------------------	-------------------------------------

TABLEAU VII-3 : Sous algèbres connexes de dimension 5 (début)

$$[e, f] = \sigma f + h ; [e, g] = g ; [e, h] = h ; [g, k] = h$$

2		$[T^0(2) \sqcup A(2)] \sqcup V_{\sigma} \{P_t - P_z, P_y, A_x, A_y, \sigma K_z + P_x\} \quad \sigma > 0$
---	--	--

$$[e, f] = g ; [e, g] = -f ; [e, h] = -\alpha h ; [e, k] = \alpha k$$

4	$T(4) \sqcup F_f \{P_t, P_x, P_y, P_z, J_f\}$	
---	---	--

$$[e, f] = f ; [e, g] = -g ; [e, h] = h ; [f, k] = h ; [f, g] = 2k$$

3	$T^+(3) \sqcup S(1) \{P_t, P_x, P_z, A_x, K_z\}$	$T^+(3) \sqcup S_{\sigma}(1) \{P_t, P_x, P_z, A_x, \sigma K_z + P_y\} \quad \sigma > 0$
---	--	---

TABLEAU VII-3 : Sous algèbres connexes de dimension 5 (fin)

Les symboles e, f, g, h, k représentent les générateurs des sous algèbres connexes de dimension 5. Dans chaque cas, nous avons seulement écrit les crochets de Lie non nuls.

$\text{Dim}(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A)$	$\text{Dim } \mathcal{L}_A$	Algèbre	Algèbre dérivée D	Dim D
6	0	Lorentz	Lorentz	6
3	3	$E(3) \quad \{J_x, J_y, J_z, P_x, P_y, P_z\}$	$\{\vec{J}, \vec{P}\}$	6
3	3	$E(2,1) \quad \{J_z, K_x, K_y, P_x, P_y, P_t\}$	$\{J_y, K_x, K_z, P_x, P_y, P_t\}$	6
3	3	$T^0(3) \sqcup {}^L E(2) \quad \{J_z, A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	$\{A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	5
3	3	$W(2) \ H^{\uparrow(\downarrow)} \quad \{J_z \pm (P_t + P_z), A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	$\{A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	5
3	3	$T^0(3) \sqcup \text{Th}(2) \quad \{K_z, A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	$\{A_x, A_y, P_t - P_z\}$	3
3	3	$T^0(3) \sqcup S_f(2) \quad \{J_f, A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	$\{A_x, A_y, P_x, P_y, P_t - P_z\}$	5
2	4	$E(2) \times E(1,1) \quad \{J_z, K_z, \tau(4)\}$	$\tau(4)$	4
2	4	$T(4) \sqcup A(2) \quad \{A_x, A_y, \tau(4)\}$	$\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$	3
2	4	$T(4) \sqcup S(1) \quad \{K_z, A_x, \tau(4)\}$	$\{P_x, P_z, P_t\}$	3

TABLEAU VII-4 : Sous algèbres de $\mathcal{P}$ de dimension 6

.../...

VIII - FILS ET PETITS FILS DES SOUS-GROUPES CONNEXES DE
DE DIMENSION 6

Ce chapitre est constitué d'une série de tableaux montrant la filiation d'un certain nombre de sous-groupes connexes de Poincaré. Un premier tableau est consacré aux fils et petits fils, à une conjugaison de Poincaré près, de $T(4) \boxtimes S(2)$. Les autres tableaux donnent la filiation des sous algèbres de dimension 6, apparaissant dans le tableau VIII-1. Les tableaux correspondant à $L(3,1)$, $E(3)$ et $E(2,1)$ ayant été étudiés au chapitre III ne sont pas reproduits.

L'élaboration de ces tableaux est faite en utilisant, d'une part, les théorèmes sur les sous algèbres maximales donnés au chapitre II, et, d'autre part, les résultats obtenus dans les chapitres précédents.

.../...

$$W(2) \oplus H^{\uparrow}(\psi)$$
$$\{P_x, P_y, P_t, P_z, A_x, A_y, J_z(P_t + P_z)\}$$

$$W(2)$$
$$\{P_x, P_y, P_t, P_z, A_x, A_y\}$$

$$T^0(3) \oplus H^{\uparrow}(\psi)$$
$$\{P_x, P_y, P_t, P_z, J_z(P_t + P_z)\}$$

$$T^0(3) \oplus A(1)$$
$$\{P_t, P_z, P_x, P_y, A_x\}$$

$$[T^0(2) \oplus A^{\uparrow}(\psi)(1)] \oplus A(1)$$
$$\{P_y, P_t, P_z, A_x, P_x, A_x\}$$

$$T^0(2) \oplus A(2)$$
$$\{P_y, P_t, P_z, A_x, A_y\}$$

$$T^0(3)$$
$$\{P_t, P_z, P_x, P_y\}$$

$$T^-(2) \oplus H^{\uparrow}(\psi)$$
$$\{P_x, P_y, J_z(P_t + P_z)\}$$

$$T^0(1) \oplus H^{\uparrow}(\psi)$$
$$\{P_t, P_z, J_z(P_t + P_z)\}$$

TABLEAU VIII-2 : Fils et petits fils de $W(2) \oplus H^{\uparrow}(\psi)$

6-

5-

4-

3-

2-

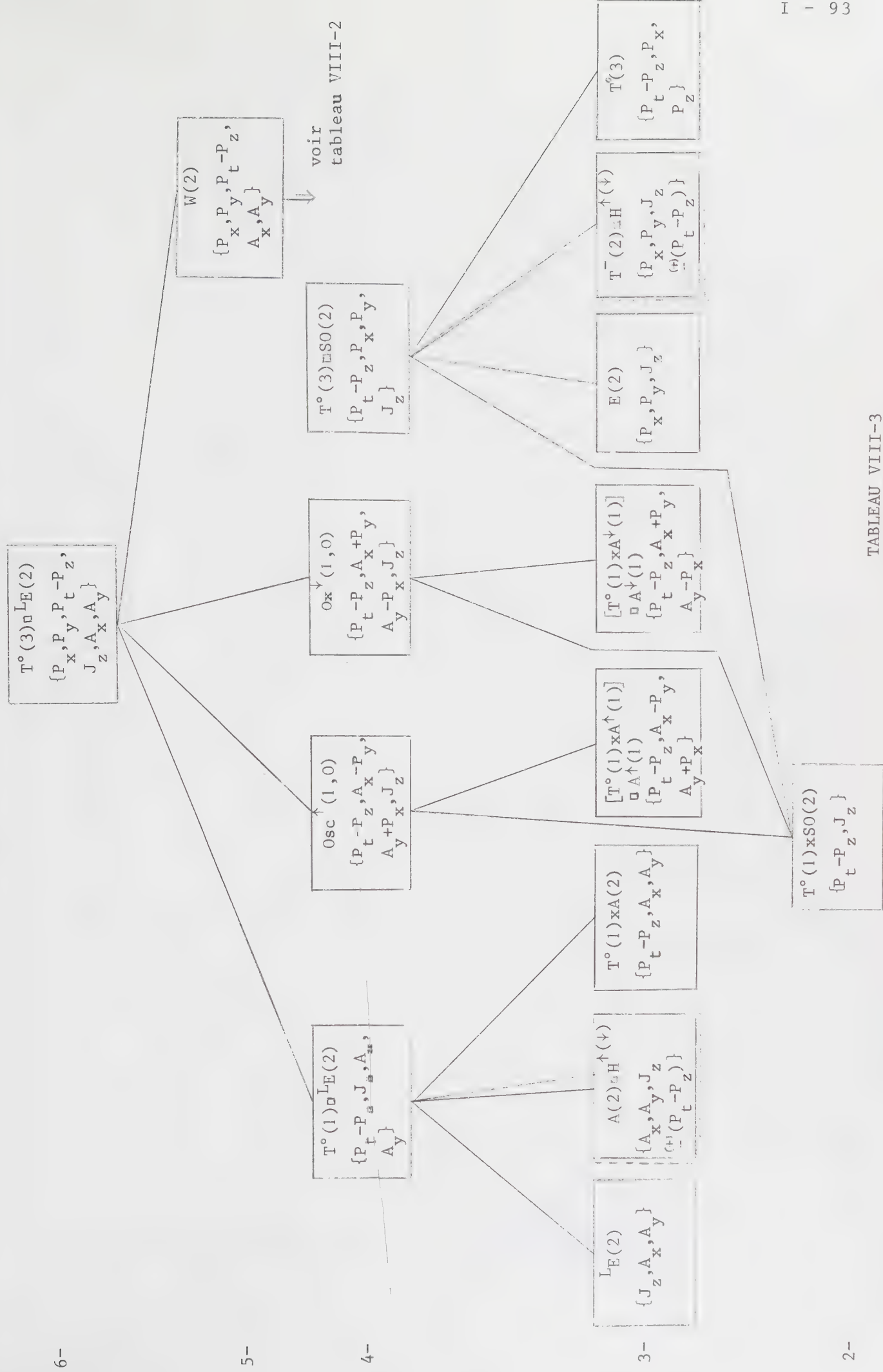


TABLEAU VIII-3
Fils et petits-fils de $T^0(3) L_E(2)$

6-

5-

4-

3-

2-

$$T(4) \supset A(2) \\ \{P_t, \vec{P}, A_x, A_y\}$$

$$W(2) \\ \{P_x, P_y, P_t, P_z, A_x, A_y\}$$

$$T(4) \supset A(1) \\ \{P_t, \vec{P}, A_x\}$$

$$[T^0(3) \supset A^-(1)] \supset A(1) \\ \{P_t, P_z, P_x, P_y, A_x, A_y + P_t, P_z\}$$

voir
tableau
VIII-2

$$T^0(3) A(1) \\ \{P_t, P_z, P_x, P_y, A_x\}$$

$$T^+(3) A(1) \\ \{P_t, P_x, P_y, A_x\}$$

$$T^+(3) A^{\uparrow(+)}(1) \\ \{P_t, P_x, P_z, A_y, P_x\}$$

$$T(4) \\ \{P_t, \vec{P}\}$$

$$T^0(3) A^-(1) \\ \{P_t, P_z, P_x, P_y, A_y\}$$

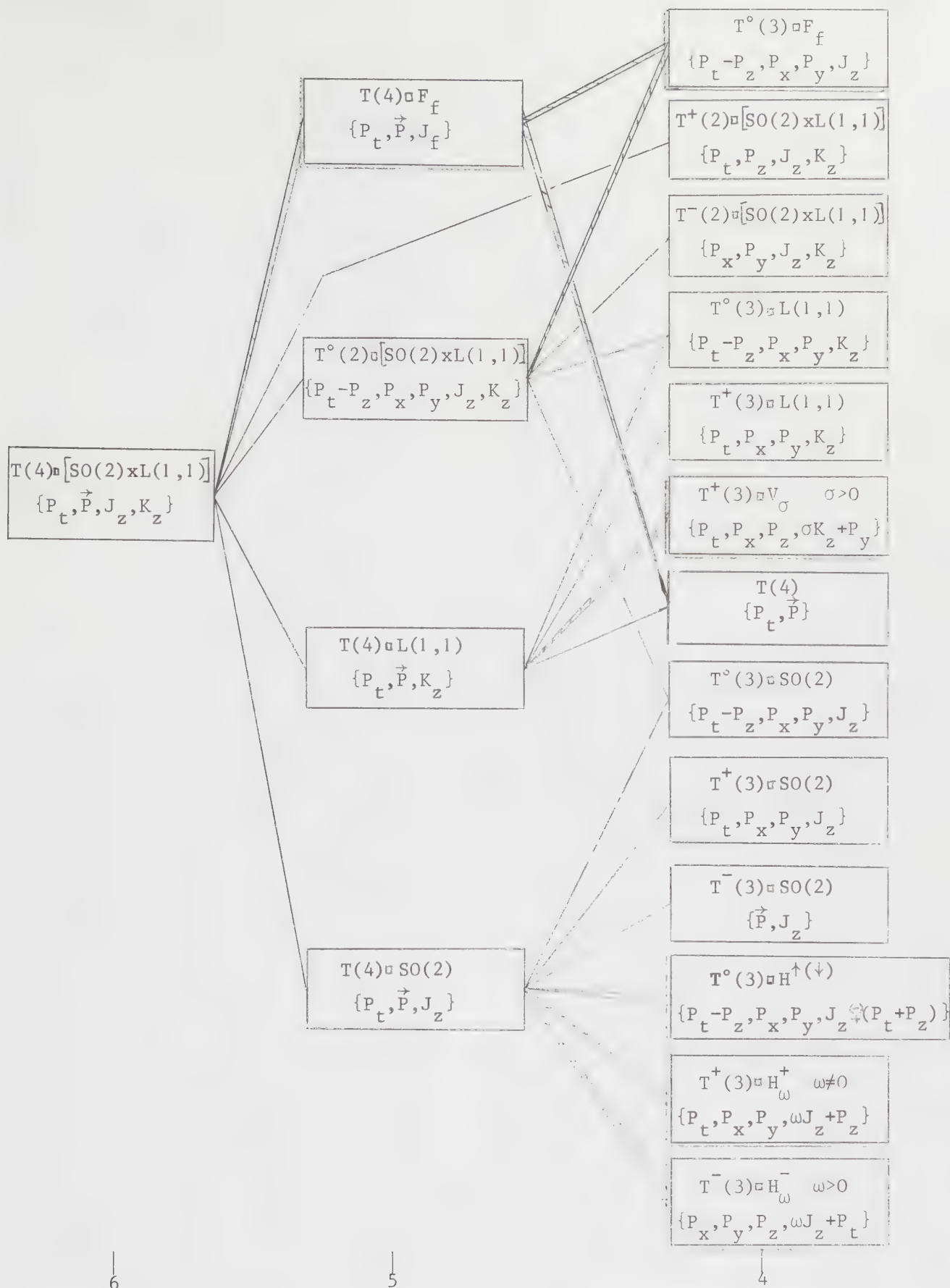
$$[T^0(2) \supset A^-(1)] \\ \supset A^{\uparrow(+)}(1) \\ \{P_t, P_z, P_x, A_x, P_y, A_y\}$$

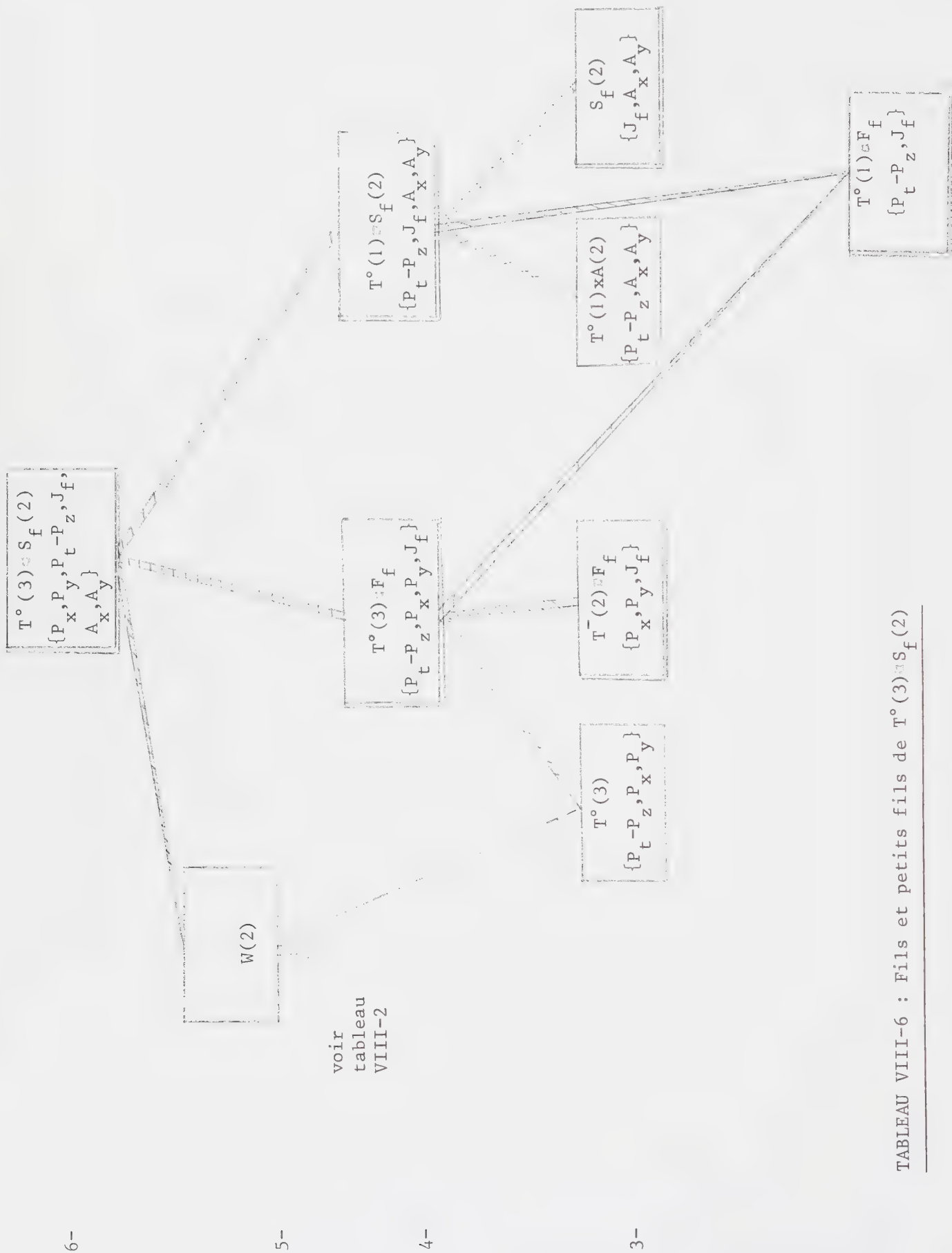
$$[T^0(2) \supset A^-(1)] \\ \supset A^{\alpha}(1) \quad \alpha \neq 0 \\ \{P_t, P_z, P_x, A_y, A_x + \alpha P_y\}$$

$$[T^0(2) \supset A^-(1)] \\ \supset A(1) \\ \{P_t, P_z, P_x, A_y, A_x\}$$

TABLEAU VIII-4 : Fils et petits fils de $T(4) \supset A(2)$

$$\ast A_y^- = A_y + P_t + P_z$$

TABLEAU VIII-5 : Fils et petits fils de $T(4) \supset [SO(2) \times L(1,1)]$



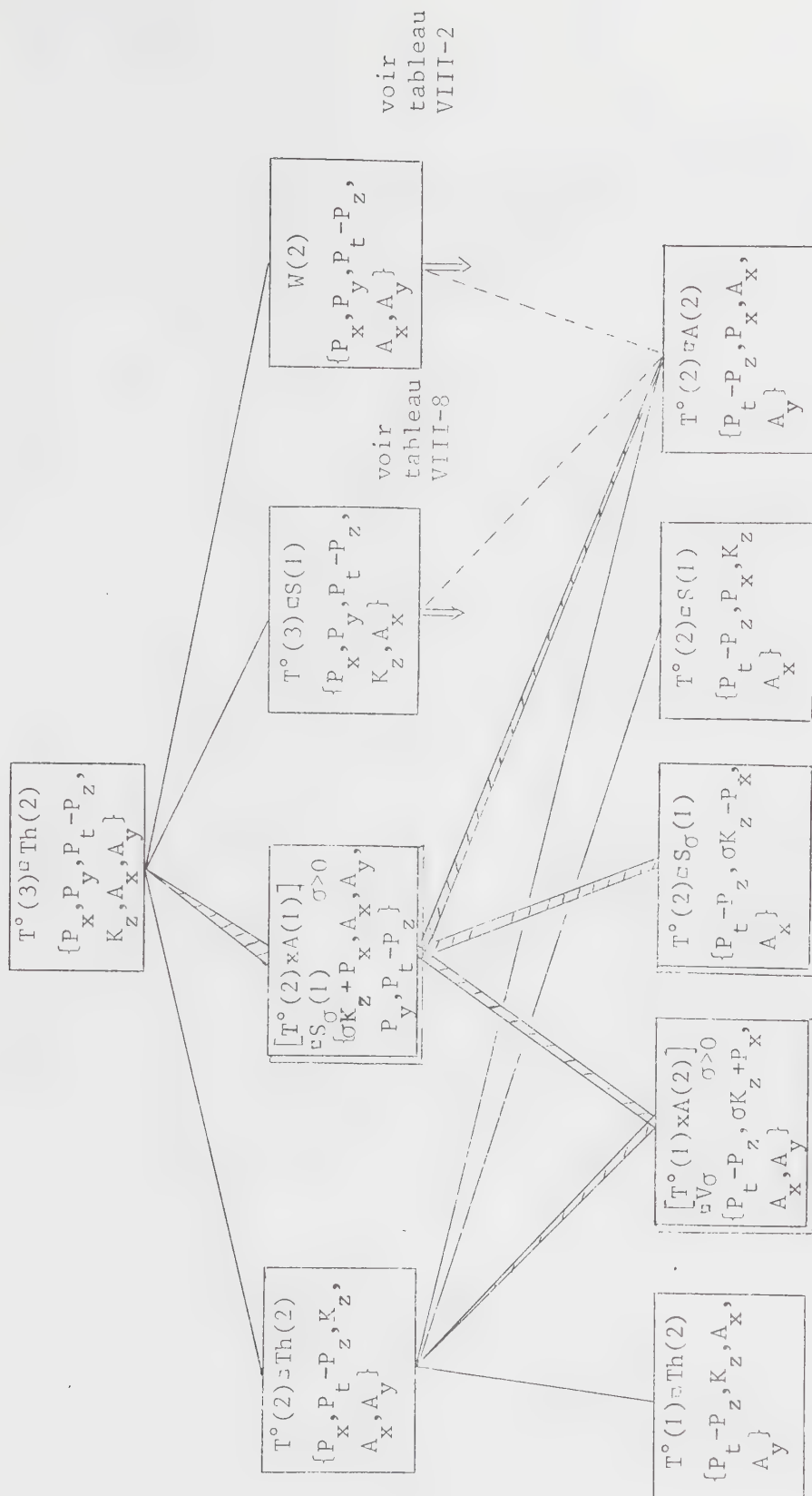
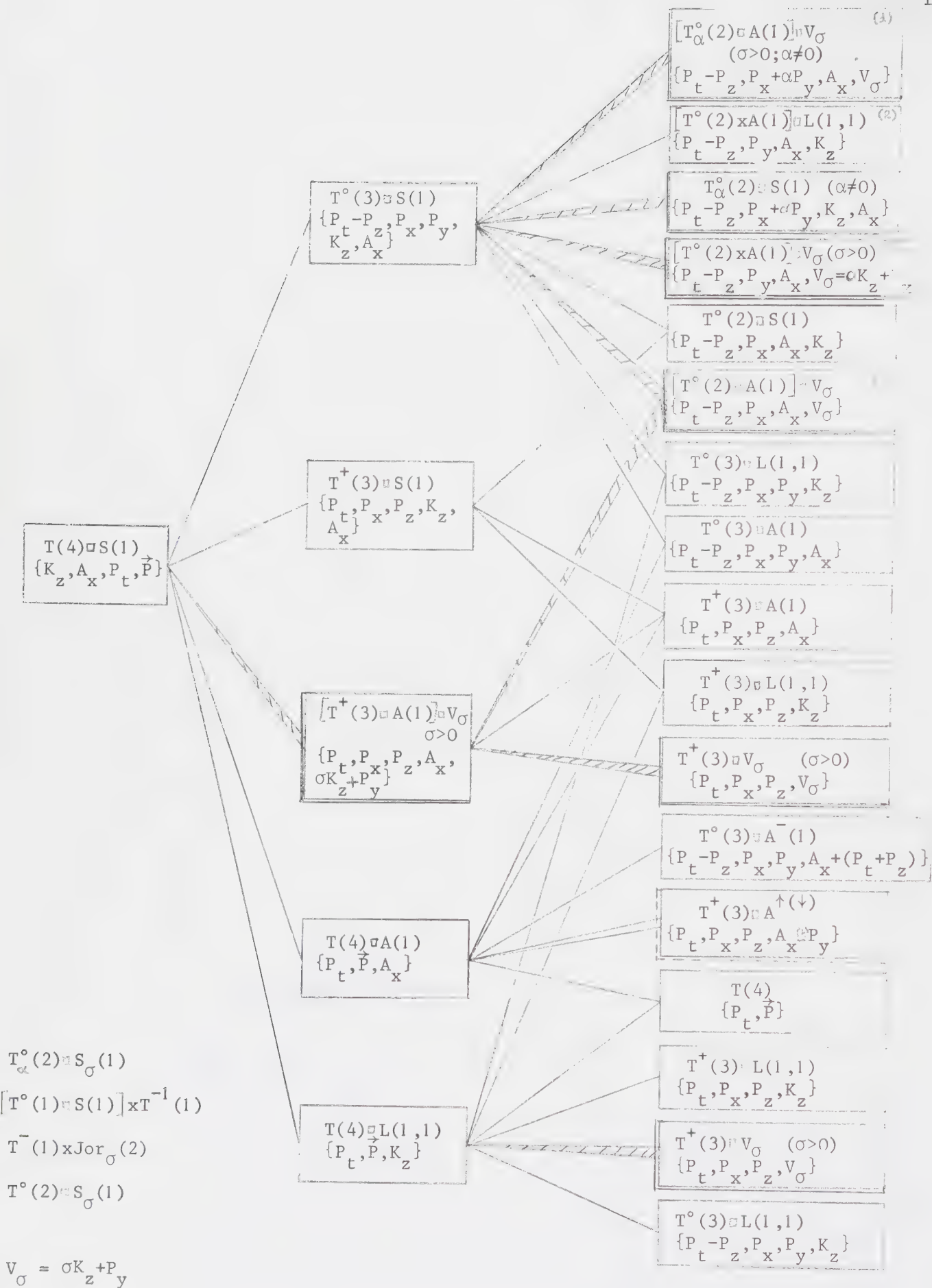


TABLEAU VIII-7 : Fils et petits fils de $T^o(3) \sqcup Th(2)$

TABLEAU VIII-8 : Fils et petits fils de $T(4) \otimes S(1)$

IX - RECHERCHE DES CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES AYANT UNE SYMETRIE DONNEE

1) Généralités

Il est clair que lorsqu'un champ électromagnétique extérieur est présent la symétrie de Poincaré est brisée. Cependant, ce champ extérieur peut posséder comme groupe de symétrie un sous-groupe de Poincaré.

Dans ce dernier cas, des informations concernant le "mouvement" d'une particule dans ce champ peuvent être déduites de l'étude du sous-groupe de Poincaré qui laisse le champ invariant.

Aussi, il apparaît très prometteur de connaître les sous-groupes ^{de} P qui ont la propriété d'être groupe de symétrie d'un champ électromagnétique, et de construire les champs correspondants.

Nous rappelons qu'un champ électromagnétique est une application de l'espace de Minkowski* M dans l'espace des tenseurs antisymétriques de rang deux, qui vérifient les équations de Maxwell

$$\partial_{\mu} F_{\nu\rho} + \partial_{\nu} F_{\rho\mu} + \partial_{\rho} F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IX-1})$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + J^{\nu} = 0 \quad (\text{IX-2})$$

où

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

* L'espace de Minkowski est muni de la métrique définie par

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1, \quad g^{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Dans ce travail, le champ F est tel que les composantes $F_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) sont des fonctions réelles, dérivables sur M ou sur un sous-espace de M ne dépendant pas de μ et ν .

Comme précédemment (a, L) dénote un élément du groupe de Poincaré $\mathcal{P}$ agissant sur M , a étant la partie translation et L la partie Lorentz. Sous l'action de (a, L) , le champ F est transformé en champ ${}^{(a, L)}F$ tel que

$${}^{(a, L)}F^{\mu\nu}(x) = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(L^{-1}(x-a)) \quad (\text{IX-3})$$

Nous appelons stabilisateur dans $\mathcal{P}$ du champ F l'ensemble des éléments $(a, L) \in \mathcal{P}$ tel que

$${}^{(a, L)}F = F \quad (\text{IX-4})$$

Nous noterons un tel ensemble $\text{Stab}_{\mathcal{P}}(F)$.

Dans le paragraphe 2, nous définirons la notion de sous-groupe électromagnétique connexe de Poincaré et nous donnerons des propriétés de ces sous-groupes, en particulier nous verrons que leurs dimensions doivent être inférieures ou égales à 6. Nous donnerons, dans le paragraphe 3, une méthode de construction des champs, s'il en existe, invariants sous un sous-groupe connexe de Poincaré. Cette méthode sera illustrée par deux exemples. Dans un dernier paragraphe, nous étudierons plus particulièrement les sous-groupes connexes de dimensions 5 et 6.

2) Définitions et propriétés d'un sous-groupe électromagnétique connexe de Poincaré

Nous donnerons d'abord deux définitions :

Définition (IX-1)

Un sous-groupe (connexe) G de Poincaré est appelé sous-groupe électromagnétique (connexe) de Poincaré ((C).E.P.S.) s'il existe au moins un champ électromagnétique F , $F \neq 0$, les $F^{\mu\nu}$ étant des fonctions réelles définies et dérivables sur M ou sur un domaine de M , tel que (la partie connexe de) $\text{Stab}_P(F)$

est égal à G .

Définition (IX-2)

Un sous-((C).E.P.S.) est un sous-groupe (connexe) K de P tel qu'il existe K' sous-groupe (connexe) de P , $K' \neq K$ et $K' \neq \{e\}$, tel que tout champ électromagnétique invariant sous K soit invariant sous K' .

Nous pouvons, maintenant, donner quelques propriétés des C.E.P.S., qui permettront de simplifier leur classification.

a) Remarquons d'abord

Proposition (IX-1)

Soit G et G' deux ((C).E.P.S.) conjugués, et soit $(a, L) \in P$ tel que $(a, L)G(a, L)^{-1} = G'$. Alors si F est invariant sous G , $(a, L)F$ défini par (IX-3) est invariant sous G' .

Cette proposition se déduit facilement de la relation (IX-3). Il découle de cette proposition qu'il est suffisant de s'intéresser au (C.E.P.S.) défini à une conjugaison près.

b) L'étude des orbites dans M sous l'action d'un (C.E.P.S.) conduit à d'intéressantes remarques.

Soit F un champ électromagnétique invariant sous G ; alors les équations (IX-3) et (IX-4) donnent :

$$L_{\alpha} F^{\mu\nu} = 0 \quad (IX-5)$$

pour tout $x \in M$ et $(\alpha, L) \in G$.

Ainsi, si nous connaissons la valeur de F au point x, l'équation (IX-5) nous permet de déduire la valeur de F au point $x' = Lx + a$. En particulier, si $F(x_0) = 0$, alors F est nul en tout point de l'orbite de x_0 sous G. Si F n'a pas une valeur finie en x_0 , il en est de même sur toute l'orbite de x_0 .

Maintenant, soit x_0 tel que $F(x_0)$ possède une valeur finie non nulle. Nous pouvons, alors, associer à la valeur $F(x_0)$ du champ F au point x_0 un champ constant et uniforme F_{x_0} dont les composantes sont définies par $F_{x_0}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}(x_0)$. Ce champ uniforme et constant est caractérisé par les deux quantités

$$\Delta(F_{x_0}) = \frac{1}{2} F_{x_0}^{\mu\nu} F_{x_0\mu\nu} \quad (IX-6)$$

$$\star(F_{x_0}) = \frac{1}{2} F_{x_0}^{\mu\nu} \star F_{x_0\mu\nu}$$

* Nous rappelons que $F_{x_0}^{\star} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$

1) Si la quantité $\Delta + i\Phi \neq 0$, il existe un observateur [5] p.260, pour lequel les vecteurs $\vec{E}$ ($E^i = F^{0i}$, la partie électrique) et $\vec{B}$ ($B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$, la partie magnétique) sont parallèles.

11) Si la quantité $\Delta + i\Phi = 0$, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux et de même longueur (voir Appendice D).

Ainsi, définissant le genre de F au point x_0 , par le genre du champ associé F_{x_0} , on peut facilement vérifier que

Proposition (IX-2)

Pour tout champ F invariant sous un {CEPS}, G , la

$$\Delta(x) + i\Phi(x) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(x) F^{\mu\nu}(x)$$

est constante sur l'orbite de x sous G .

Ainsi, le type du champ F est le même en deux points x et x' appartenant à la même orbite.

c) Soit un champ électromagnétique F et supposons qu'il existe $x_0 \in M$ et $(a, L) \in P$ tel que :

$$F^{\mu\nu}(x_0) = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x_0) \quad (\text{IX-7})$$

Cette équation est celle que doit satisfaire une transformation de Lorentz qui laisse invariant le champ uniforme et constant $F_{x_0} = F(x_0)$.

On peut vérifier [9] que le sous-groupe connexe de Lorentz qui stabilise un tel champ $F = (\vec{E}, \vec{B})$ est de dimension 2, son algèbre de Lie étant engendrée par :

$$G = \vec{B}\vec{J} - \vec{E}\vec{K}$$

(IX-8)

$$G^* = \vec{E}\vec{J} - \vec{B}\vec{K}$$

les générateurs de Lorentz J_k et K_k ($k = 1, 2, 3$) correspondant respectivement aux rotations et aux transformations de Lorentz pures.

Selon que la quantité $\Delta + i\Phi$ s'annule ou pas, le stabilisateur est un groupe isomorphe, soit à $A(2)$ engendré par $\Lambda_x = K_x - J_y$ et $\Lambda_y = K_y + J_x$, soit à $SO(2) \times L(1,1)$ engendré par J_z et K_z . Ces remarques conduisent* à la proposition

Proposition (IX-3)

Si un sous-groupe G de P stabilise le champ F , alors en tout point $x_0 \in M$ pour lequel $F(x_0) \neq 0$ est fini, l'ensemble des transformations de G de la forme $(x_0 - Lx_0, L)$ engendrent une algèbre de Lie de dimension ≤ 2 , conjuguée de l'une des deux algèbres $SO(2) \times L(1,1)$ ou $A(2)$, ou d'une sous-algèbre de ces deux algèbres.

* Remarquons que le calcul de l'action de la translation $(a, 1)$ de P sur un élément $(0, L)$

$$(a, 1)(0, L)(a, 1)^{-1} = (a - La, L)$$

revient à calculer dans l'algèbre $\mathfrak{P}$ de P la quantité

$$m = \ell + [t, \ell]$$

où $(a, 1) = e^t$, $(0, L) = e^\ell$ et $(a - La, L) = e^m$

d) Nous pouvons déduire de ces résultats une conséquence intéressante

Proposition (IX-4)

Tout C.E.P.S. est de dimension ≤ 6 .

En effet, de l'identité $(x_0 - Lx_0, L) = (x_0, 1)(0, L)(x_0, 1)^{-1}$, nous déduisons que le C.E.P.S., G , considéré dans la proposition (IX-3) est conjugué par la translation $(-x_0, 1)$ du sous-groupe G_{x_0} , dont la partie Lorentz est de dimension < 2 . L'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_{x_0}$ de G_{x_0} peut s'écrire en utilisant les notations du chapitre II :

$$\mathfrak{G}_{x_0} = \mathfrak{L}_{x_0} + \mathfrak{M}_{x_0} + \mathfrak{N}_{x_0} \quad (\text{IX-10})$$

où $\mathfrak{L}_{x_0}$ est la partie translation et $\mathfrak{M}_{x_0}$ un sous-espace complémentaire de $\mathfrak{L}_{x_0} + \mathfrak{N}_{x_0}$. Puisque la dimension de $\mathfrak{M}_{x_0} + \mathfrak{N}_{x_0}$ ne peut pas dépasser 4, on déduit que $\mathfrak{G}_{x_0}$, et l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G , sont de dimension inférieure ou égale à 6.

3) Les C.E.P.S. et les champs invariants associés

Dans le but de déterminer les C.E.P.S. et de mettre en évidence les champs électromagnétiques correspondants, nous ferons les remarques suivantes :

1) D'après la proposition (IX-1), il suffit de rechercher les C.E.P.S. dans la classification, à une conjugaison près, des sous-groupes connexes de P . Nous utiliserons les tableaux donnés dans les chapitres précédents.

ii) Les propositions (IX-3) et (IX-4) nous permettent de montrer que les sous-groupes suivants ne peuvent pas être ((C)E.P.S.) ou sous-C.E.P.S.*

- a) tous les sous-groupes de G tels que $\dim G > 6$
- b) les sous-groupes de dimension 6

$$G\{\mathcal{G}(4), K_z, A_x\}, G\{\vec{P}, \vec{J}\}, G\{\mathcal{G}^+(3), J_y, K_x, K_z\}$$

$$G\{\mathcal{G}^0(3), J_z, A_x, A_y\}, G\{\vec{J}, \vec{K}\}$$

- c) le sous-groupe de dimension 5

(IX-11)

$$G\{\mathcal{G}^+(3), A_x, \sigma K_z + P_y\}, \sigma > 0$$

*

Nous utiliserons la notation $G\{X, Y \dots Z\}$ pour le groupe de Lie connexe engendré par $X, Y, \dots Z$.

Les générateurs des translations sont notés P_t, P_x, P_y, P_z . L'algèbre abélienne engendrée par les 4 translations est notée $\mathcal{G}(4)$, tandis que $\mathcal{G}^0(3), \mathcal{G}^+(3), \mathcal{G}^-(3)$ sont les algèbres engendrées respectivement par $\{P_x, P_y, P_t - P_z\}$, $\{P_x, P_z, P_t\}$ et $\{P_x, P_y, P_z\}$.

.../...

Avant de démontrer cette affirmation, nous signalerons que les résultats du paragraphe (4,c) nous permettent d'affirmer que (IX-11) donne tous les sous-groupes connexes de Poincaré qui ne sont pas C.E.P.S. ou sous-C.E.P.S.

Considérons maintenant les sous-groupes de dimension 6 écrits en b). En utilisant les relations de commutation de Poincaré, nous pouvons vérifier qu'en tout point $x_0 \in M$, la partie Lorentz $\mathcal{L}_{x_0}$ (définie précédemment dans l'établissement de la proposition (IX-3)), est de dimension 2, mais non conjuguée de $SO(2) \times L(1,1)$ ou $A(2)$ pour $G(\mathcal{C}(4), K_z, A_x)$, et de dimension 3 dans les autres cas.

Pour montrer que $G(\mathcal{C}^+(3), A_x, \sigma K_z + P_y) \sigma > 0$ n'est pas C.E.P.S., il est suffisant de montrer que l'invariance sous $G(\mathcal{C}^+(3), A_x)$ implique l'invariance sous $G(\mathcal{C}(4), A_x, A_y)$. Cette dernière propriété peut être montrée de la façon suivante. Soit F un champ électromagnétique invariant sous $G(\mathcal{C}^+(3), A_x)$. Alors F dépend seulement de la variable y . De plus, l'invariance de F sous l'élément L engendré par A_x s'écrit :

$$F^{\mu\nu}(L_{x_0}) = L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}(x_0)$$

pour tout x_0 appartenant au domaine de définition de F .
Considérons l'action^x de L sur M , on déduit

^x Dans la base $\{e_1, e_2, e, e\}$ où $e = \frac{e_1 + e_3}{2}$ et $e' = e_1 - e_3$

on a

$$e^{\alpha A_x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & \frac{\alpha^2}{2} & 1 \end{vmatrix} \quad e^{\beta A_y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & \frac{\beta^2}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$F(L'x_0) = F(x_0)$$

Nous pouvons ainsi écrire

$$F^{(n)}(x_0) = L'^{\mu_1} L'^{\mu_2} \dots L'^{\mu_n} F^{(0)}(x_0)$$

D'après le paragraphe 2-c, il s'ensuit que

$$F^{\mu\nu}(L'x_0) = L'^{\mu\rho} \rho L'^{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}(x_0)$$

où $L'^{\mu\nu} = e^{\delta_A^{\mu\nu}}$, ρ réel. Comme F vérifie aussi

$$F(L'x_0) = F(x_0)$$

nous avons montré que F est invariant sous tout élément

$L' = e^{\delta_A^{\mu\nu}}$, δ réel. Maintenant, en utilisant les relations de commutation de P , on déduit facilement que si F est invariant sous $G\{S^+(3), A_x\}$, il est invariant sous $G\{S^+(4), A_x, A_y\}$.

Dans le but d'étudier les sous-groupes de P qui ne sont pas donnés dans (IX-11) et de déterminer les champs invariants correspondants, s'il en existe, nous utiliserons la méthode suivante :

i) Recherche des orbites dans M sous G .

ii) En utilisant le paragraphe 2-c, il est possible de vérifier si, sur chaque orbite, il existe un champ fini non nul, et éventuellement, caractériser ce champ. Ainsi, nous obtenons des informations sur le domaine de définition du champ.

iii) Une fois la valeur du champ donnée en un point représentatif de chaque orbite, l'utilisation de (IX-5) nous permet d'obtenir la valeur du champ en tout point de

iv) Maintenant, nous pouvons imposer certaines conditions de continuité, par exemple, la continuité sur le domaine de M où le champ a des valeurs finies.

v) Nous imposons les équations de Maxwell (IX-1) dans le but de sélectionner les champs électromagnétiques, les équations (IX-2) étant considérées comme une définition du quadrivecteur courant.

Nous pouvons ajouter deux remarques :

La première est relative au cas où l'on veut considérer la présence de charge magnétique. Alors les équations (IX-1) doivent être modifiées comme suit

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^{*\nu} \quad (\text{IX-12})$$

et considérées comme une définition du quadrivecteur j^* (courant magnétique).

La seconde concerne la réalisation physique des champs. Il peut se produire que des champs satisfaisant aux équations de Maxwell (IX-1) conduisent par (IX-2) à des courants qui ne sont pas physiquement réalisables : un exemple est donné par des champs correspondant à des particules chargées se déplaçant à la vitesse de la lumière (voir tableau IX-2).

Pour des raisons de clarté, nous illustrerons cette méthode par deux exemples :

a) Dans un premier exemple, nous considérons le groupe $G = T^*(1) \times SO(3)$ engendré par $\{P_t, J_x, J_y, J_z\}$. Les orbites dans M sont de deux types :

i) l'axe des temps t ($x = y = z = 0$)

ii) le produit direct $R \times S_{2,r}$ de l'axe des t par la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad r > 0 \quad (IX-13)$$

Nous pouvons immédiatement constater que les champs invariants sous un tel groupe ne doivent pas dépendre de la variable t . De plus, la proposition (IX-3) nous assure qu'il n'existe pas de champ fini non nul sur l'orbite i). Dans le cas ii), nous choisissons un point représentatif sur chaque orbite (*)

$$x_0 = (0, 0, 0, r) \quad r > 0$$

L'ensemble des transformations de G de la forme $(x_0 - Lx_0, L)$ est engendré par J_z . Ainsi, le champ uniforme et constant $F_{x_0} = F(x_0)$ est du type $SO(2) \times L(1,1)$ (engendré par J_z et K_z). Nous déduisons alors des équations (IX-8)

$$\begin{aligned} E_x(0,0,r) &= E_y(0,0,r) = B_x(0,0,r) = B_y(0,0,r) = 0 \\ E_z(0,0,r) &= f(r) \\ B_z(0,0,r) &= g(r) \end{aligned} \quad (IX-14)$$

(*) Dans cet exemple, nous exprimons les vecteurs dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$.

Par action de l'élément $e^{\alpha J_x} e^{\alpha J_y}$ de G

$$e^{\alpha J_x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} e^{\theta J_y} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IX-15})$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} E_x(r \sin \theta, -r \cos \theta \sin \alpha, r \cos \theta \cos \alpha) &= f(r) \sin \theta \\ E_y(r \sin \theta, -r \cos \theta \sin \alpha, r \cos \theta \cos \alpha) &= -f(r) \cos \theta \sin \alpha \\ E_z(r \sin \theta, -r \cos \theta \sin \alpha, r \cos \theta \cos \alpha) &= f(r) \cos \theta \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{IX-16})$$

Le même type de résultats est obtenu par $\vec{B}$.

En posant :

$$x = r \sin \theta, \quad y = -r \cos \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta \cos \alpha$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \frac{x}{r} f(r) & B_x(x, y, z) &= \frac{x}{r} g(r) \\ E_y(x, y, z) &= \frac{y}{r} f(r) & B_y(x, y, z) &= \frac{y}{r} g(r) \\ E_z(x, y, z) &= \frac{z}{r} f(r) & B_z(x, y, z) &= \frac{z}{r} g(r) \end{aligned} \quad (\text{IX-17})$$

Si nous imposons maintenant que f et g soient continues et dérivables pour $r > 0$, les premières équations de Maxwell (IX-1) donnent

$$g(r) = \frac{A}{r^2} \quad A \text{ réel.} \quad (\text{IX-18})$$

Ainsi les champs invariants sous $T^+(1) \times SO(3)$ sont de la forme suivante .

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \vec{x} h(r) \\ B(\vec{x}) &= A \frac{\vec{x}}{r^2} \end{aligned} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{IX-19})$$

Dans cet exemple, le champ est défini dans le complémentaire de l'axe du temps.

b) Comme second exemple, nous étudierons le cas du groupe $G' = T^-(1) \times SO(2,1)$ engendré par $\{P_z, J_z, K_x, K_y\}$.

Dans l'exemple précédent, la partie Lorentz isomorphe à $SO(3)$ était compacte, tandis que dans ce cas la partie Lorentz est isomorphe à $SO(2,1)$ et n'est pas compacte.

Les orbites dans M sous G' peuvent être classées comme suit .

i) l'axe des z ($t = x = y = 0$)

ii) le produit direct $R \times C_{2\pm}$ de l'axe des z par les demi-cones

$$\begin{aligned} t^2 - x^2 - y^2 &= 0 & \alpha) t > 0 \\ & & \beta) t < 0 \end{aligned} \quad (\text{IX-20})$$

iii) les produits directs de l'axe des z par les hyperboloïdes, ou les nappes d'hyperboloïdes

$$\begin{aligned} t^2 - x^2 - y^2 &= k & \alpha) k > 0, \quad t > 0 \\ & & \beta) k > 0, \quad t < 0 \\ & & \gamma) k = 0 \end{aligned} \quad (\text{IX-21})$$

Il n'existe pas de champ fini, non nul dans le cas i).
 Dans le cas ii) un calcul simple conduit aux solutions

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_y = B_z = 0 \\
 B_z &= t a_\epsilon \\
 B_x &= y a_\epsilon \\
 B_y &= - x a_\epsilon
 \end{aligned}
 \tag{IX-22}$$

où $t = \epsilon \sqrt{x^2 + y^2}$, $\epsilon = \pm 1$ suivant que l'on est dans le cas ii, α) ou ii, β). Les a_ϵ sont des constantes.

Dans le cas iii, α, β , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 E_x &= A_\epsilon \frac{y}{k^{3/2}} & B_x &= y f(k) \\
 E_y &= A_\epsilon \frac{x}{k^{3/2}} & B_y &= -x f(k) \\
 E_z &= t f(k) & B_z &= A_\epsilon \frac{t}{k^{3/2}}
 \end{aligned}
 \tag{IX-23}$$

où $t = \epsilon \sqrt{k + x^2 + y^2}$ avec $k > 0$, $\epsilon = \pm 1$ selon que l'on est dans le cas α ou β . Les A_ϵ étant des constantes.

Nous supposons que f est une fonction continue et dérivable dans $k = t^2 - x^2 - y^2 > 0$. Ainsi, nous avons un champ défini sur les strates qui correspondent à $k > 0$, $t > 0$ ou $t < 0$. Enfin, dans le cas iii, γ , les champs électromagnétiques invariants sont donnés par

$$\begin{aligned}
 E_x &= -B \frac{y}{k^{3/2}} & E_x &= y g(k) \\
 E_y &= B \frac{x}{k^{3/2}} & B_y &= -x g(k) \\
 E_z &= t g(k) & B_z &= B \frac{t}{k^{3/2}}
 \end{aligned}
 \tag{IX-24}$$

où B est une constante et g une fonction continue et dérivable sur la strate $k = t^2 - x^2 - y^2 < 0$.

En combinant ces divers résultats, on peut facilement voir qu'il existe un champ électromagnétique défini sur le complémentaire de l'axe des z , et qui est donné par

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$E_z = t h(t^2 - x^2 - y^2)$$

(IX-25)

$$B_x = y h(t^2 - x^2 - y^2)$$

$$B_y = -x h(t^2 - x^2 - y^2)$$

où h est une fonction continue et dérivable de la variable $k = t^2 - x^2 - y^2$.

4) Classification des (C.E.P.S.) de grande dimension avec leurs champs invariants correspondants.

Dans ce paragraphe, nous ferons une étude complète des (C.E.P.S.) de dimensions 6 et 5 et nous donnerons une classification des champs électromagnétiques correspondants. Il apparaîtra que, parmi les sous-groupes connexes de Poincaré de dimension 5, plusieurs d'entre eux sont seulement sous-C.E.P.S. Tous les résultats sont regroupés dans les tableaux (IX-1) et (IX-2).

De ces résultats, nous déduirons que les sous-groupes connexes de P donnés dans (IX-11) sont les seuls qui ne soient pas C.E.P.S. ou sous-C.E.P.S.

a) (G.E.P.S.) de dimension 6

D'après les tableaux (VII, 4) et (IX-11) nous devons nous intéresser simplement aux groupes :

$$G\{\tilde{U}(4), J_z, K_z\}, G\{\tilde{U}(4), A_x, A_y\}$$

$$G\{\tilde{U}(3), J_z + \varepsilon(P_t + P_z), A_x, A_y\} \quad \varepsilon = \pm 1, G\{\tilde{U}(3), K_z, A_x, A_y\},$$

$$G\{\tilde{U}(3), J_f, A_x, A_y\} \quad \text{avec } J_f = J_z \cos f/2 - K_z \sin f/2 \quad (\sin f \neq 0)$$

Les deux premiers groupes sont les groupes de symétrie de champs électromagnétiques uniformes et constants. On peut facilement vérifier les solutions données dans le tableau (IX-1).

Nous reconnaissons dans le groupe $G\{\tilde{U}(3), J_z + \varepsilon(P_t + P_z), A_x, A_y\} \quad \varepsilon = \pm 1$, les groupes de symétrie d'une onde plane polarisée circulairement. En utilisant la méthode développée au paragraphe précédent, nous pouvons vérifier qu'il n'y a pas d'autre solution.

Considérons maintenant, en détail, le groupe $G\{\tilde{U}(3), K_z, A_x, A_y\}$. Supposons que F soit un champ électromagnétique invariant sous ce groupe. L'invariance sous $\tilde{U}(3)$ implique que F ne dépende que de la variable $t-z = 0$. De plus, de la proposition (IX-3) on déduit que F ne peut pas être non nul et fini en $t-z = 0$. La même proposition nous assure qu'en tout point x_0 , tel que $t-z \neq 0$ pour lequel $F(x_0)$ est fini non nul, le stabilisateur de $F(x_0)$ est engendré par A_x et A_y . Il est alors facile, en utilisant (IX-8), de montrer que le champ vérifie les solutions

$$\begin{aligned}
E_x(x_0) &= B_y(x_0) \\
E_y(x_0) &= -B_x(x_0) \\
E_z(x_0) &= B_z(x_0) = 0
\end{aligned}
\tag{IX-26}$$

Considérons maintenant l'invariance de F sous la transformation de Lorentz pure le long de l'axe des z . Il est bien connu que la matrice 4×4 correspondant à $e^{\theta K_z}$, θ réel, agissant sur un quadrivecteur $(t, x, y, z) \in M$, peut s'écrire

$$e^{\theta K_z} = \begin{pmatrix} \text{ch}\theta & 0 & 0 & \text{sh}\theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}\theta & 0 & 0 & \theta' \end{pmatrix}
\tag{IX-27}$$

L'équation (IX-7) fournit alors les relations

$$\begin{aligned}
E_x(e^{-\theta}(t-z)) &= e^{\theta} E_x(t-z) \\
E_y(e^{-\theta}(t-z)) &= e^{\theta} E_y(t-z)
\end{aligned}
\tag{IX-28}$$

Nous pouvons alors déduire le champ invariant sous $G(\beta, K_z, A_x, A_y)$

$$\begin{aligned}
E_x(t-z) &= B_y(t-z) = \frac{A}{t-z} \\
E_y(t-z) &= -B_x(t-z) = \frac{B}{t-z} \quad A, B \text{ constantes réelles} \\
E_z &= B_z = 0
\end{aligned}
\tag{IX-29}$$

Ces fonctions étant définies, continues, dérivables sur les ensembles $t-z > 0$ ou $t-z < 0$.

Remarquons que ces solutions vérifient les équations de Maxwell (IX-1) et correspondent à un courant nul ($j^V = 0$) (voir appendice F).

Les mêmes types de calcul peuvent être utilisés pour montrer que les groupes $G\{U^{\circ}(3), J_f, A_x, A_y\}$ sont (C.E.P.S.) et fournissent les solutions données dans le tableau (IX-1).

b) (C.E.P.S.) de dimension 5

Il est facile de remarquer, en utilisant les résultats du paragraphe (IX-11) qu'un sous-groupe de dimension 5 de P tel que sa partie translation est de dimension 4, est un C.E.P.S.

De plus, on peut montrer que si un champ F est invariant sous $G\{U^{\circ}(3), A_x\}$, il est invariant sous $G\{U^{\circ}(3), A_x, A_y\}$. En effet, l'invariance sous $U^{\circ}(3)$ implique que F ne dépend que de la variable $t-z$. L'équation (IX-7) donne en tout point $(0,0,\zeta,0)$ dans la base (e_1, e_2, e, e') .

$$F^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x_0) + L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} F^{\rho\sigma}(x_0)$$

avec

$$L = e^{\alpha A_x} \quad \alpha \text{ réel.}$$

Il s'ensuit, en utilisant le paragraphe (2,c) que F vérifie aussi la relation

$$F^{\mu\nu}(L^{\rho} x_0) = F^{\mu\nu}(x_0) = L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} F^{\rho\sigma}(x_0)$$

avec

$$L = e^{\beta A_y} \quad \beta \text{ réel.}$$

En utilisant le même type d'argument, on peut montrer que si F est invariant sous $G\{P_y, P_t - P_z, A_x, A_y\}$, il l'est sous $G\{\tilde{G}^\circ(3), A_x, A_y\}$.

Ces propriétés simples nous conduisent à nous limiter aux trois groupes $G\{\tilde{G}^\circ(3), A_x, A_y\}$, $G\{\tilde{G}^\circ(3), J_z, K_z\}$ et $G\{P_t - P_z, J_z, K_z, A_x, A_y\}$ du tableau (VII,3) dans lequel nous avons éliminé les groupes $G\{\tilde{G}^+(3), \sigma K_z + P_y, A_x\}$ $\sigma > 0$, d'après (IX-11).

Nous utilisons les techniques déjà discutées pour déterminer pour chacun de ces trois groupes, les champs électromagnétiques correspondants. Les résultats sont donnés dans le tableau (IX-2).

c) (C.E.P.S.) et sous-(C.E.P.S.) de dimension inférieure ou égale à 4

Proposition

Tout sous-groupe connexe de Poincaré de dimension inférieure ou égale à 4 est, soit un (C.E.P.S.), soit un sous - (C.E.P.S.).

Utilisant une fois de plus la classification des sous-groupes connexes de Poincaré, donnée dans les chapitres précédents, nous pouvons remarquer que les seuls sous-groupes de dimension inférieure ou égale à 4 qui ne sont pas sous-groupes de (C.E.P.S.) de dimensions 6 ou 5, sont

$$G\{P_t, J_x, J_y, J_z\}, G\{P_z, J_z, K_x, K_y\}, G\{J_x, J_y, J_z\}$$

$$G\{J_z, K_x, K_y\}$$

Dans le paragraphe 2, nous avons montré que $G\{P_t, J_x, J_y, J_z\}$ et $G\{P_z, J_z, K_x, K_y\}$ étaient (C.E.P.S.)

Les deux groupes $G\{J_x, J_y, J_z\}$ et $G\{P_z, J_z, K_x, K_y\}$ sont respectivement sous-groupes de $G\{P_t, J_x, J_y, J_z\}$ et $G\{P_z, J_z, K_x, K_z\}$ et par suite C.E.P.S. ou sous-C.E.P.S.

C.E.P.S. DIMENSION SIX

dim $\mathcal{G}_A$	C.E.P.S.	Champ électromagnétique
4	$G\{\mathcal{E}(4), J_z, K_z\}$	$E_x = E_y = B_x = B_y = 0$ $E_z = \alpha$ $B_z = \beta$ α, β réels
	$G\{\mathcal{E}(4), A_x, A_y\}$	$E_x = B_y = \alpha$ $E_y = -B_x = \beta$ $E_z = B_z = 0$ α, β réels
3	$G\{\mathcal{E}^0(3), J_z + \varepsilon(P_t + P_z), A_x, A_y\}$ $\varepsilon = \pm 1$	$E_x(t-z) = B_y(t-z) = A \cos(\frac{t-z}{2} + \theta)$ $E_y(t-z) = -B_x(t-z) = -\varepsilon A \sin(\frac{t-z}{2} + \theta)$ $E_z = B_z = 0$ A, θ réels N.B. - θ peut être choisi nul.
	$G\{\mathcal{E}^0(3), K_z, A_x, A_y\}$	$E_x(t-z) = B_y(t-z) = \frac{A}{t-z}$ $E_y(t-z) = -B_x(t-z) = \frac{B}{t-z}$ $E_z = B_z = 0$ A, B réels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ définis, continus et dérivables sur l'ensemble $t-z < 0$ ou $t-z > 0$
	$G\{\mathcal{E}^0(3), J_f, A_x, A_y\}$ $J_f = J_z \cos \frac{f}{2} - K_z \sin \frac{f}{2}$ $\sin f \neq 0$	$E_x(t-z) = B_y(t-z) = \frac{A}{t-z} \sin(\phi \log t-z + \theta)$ $E_y(t-z) = -B_x(t-z) = \frac{A}{t-z} \cos(\phi \log t-z + \theta)$ $E_z = B_z = 0$ $\phi = \frac{1}{\tan f/2}$ N.B. - θ peut être choisi nul.

TABLEAU IX-1

A est la partie translation de l'algèbre de Lie du groupe G
Les représentations de ces groupes ont été étudiées dans [9] et [5].

C.E.P.S. DIMENSION CINQ

$\dim \mathcal{C}_A$	C.E.P.S. (ou sous-C.E.P.S.)	Champ électromagnétique
4	$G\{\mathcal{C}(4), J_z\}$ $G\{\mathcal{C}(4), K_z\}$ $G\{\mathcal{C}(4), J_f\}$	sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{C}(4), J_z, K_z\}$ voir tableau (IX-1)
	$G\{\mathcal{C}(4), A_x\}$	sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{C}(4), A_x, A_y\}$
3	$G\{\mathcal{C}^\circ(3), A_x, A_y\}$	$E_x(t-z) = B_y(t-z)$ $E_y(t-z) = -B_x(t-z)$ $E_z = B_z = 0$
	$G\{\mathcal{C}^\circ(3), J_z, K_z\}$ *	$E_x = E_y = B_x = B_y = 0$ $E_z = A$ pour $T-Z > 0$ et A' pour $t-z < 0$ $B_z = C$
	$G\{\mathcal{C}^\circ(3), K_z, A_x\}$	sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{C}^\circ(3), K_z, A_x, A_y\}$
	$G\{\mathcal{C}^\circ(3), A_x + P_t + P_z, A_y\}$	sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{C}(4), A_x, A_y\}$
2	$G\{P_y, P_t - P_z, K_z, A_x, A_y\}$ $G\{P_y, P_t - P_z, \sigma K_z + P_x, A_x, A_y\} \quad \sigma > 0$	sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{C}^\circ(3), K_z, A_x, A_y\}$
1	$G\{P_t - P_z, J_z, K_z, A_x, A_y\}$ *	$E_x(x, y, t-z) = B_y(x, y, t-z) = \frac{A_x}{t-z}$ $E_y(x, y, t-z) = -B_x(x, y, t-z) = \frac{A_y}{t-z}$ $E_z(x, y, t-z) = -2A \quad A \text{ réel}$ $B_z = 0$ def. ensemble $t-z > 0$ ou $t-z < 0$

TABLEAU IX-II

* Le courant relatif à ces champs correspond à des particules se déplaçant à la vitesse de la lumière.

Dans ce chapitre, le champ électromagnétique étudié est tel que les composantes $F_{\mu\nu}$ sont des fonctions réelles définies et dérivables sur un domaine de l'espace de Minkowski. Sous ces conditions, nous pouvons obtenir tous les sous-groupes connexes de Poincaré qui laissent invariant un tel champ : les C.E.P.S. et sous-C.E.P.S. De plus, étant donné un groupe d'invariance, nous avons énoncé une méthode pour déterminer tous les champs invariants sous ce groupe. Cette méthode a été appliquée aux C.E.P.S. de dimension 5 et 6.

Un résultat intéressant est l'existence de plusieurs C.E.P.S. de dimension 6, autres que les groupes d'invariance d'un champ électromagnétique constant et uniforme que nous étudions dans la deuxième partie de ce travail, et d'une onde plane polarisée circulairement. Nous pouvons remarquer que les champs électromagnétiques correspondant à ces groupes d'invariance sont des ondes planes (voir appendice F).

L'étude précédente peut être faite par la même méthode pour classer les champs électromagnétiques invariants sous des C.E.P.S. de dimension inférieure ou égale à 4. Deux cas intéressants ont été étudiés au paragraphe 3.

Il serait intéressant de considérer les $F_{\mu\nu}$ comme des distributions tempérées. Il est clair que les méthodes développées dans ce paragraphe ne sont plus applicables, à cause de l'utilisation de propriétés locales dans la démonstration des propositions.

Cependant, on peut remarquer que dans certains cas particuliers (invariance sous un grand nombre de translations, par exemple), le système d'équations aux dérivées partielles, donné dans l'appendice E, peut être utilisé sans difficulté pour déterminer les solutions.

APPENDICE A

Automorphismes d'une algèbre de Lie inhomogène

Lemme

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{L}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie inhomogène $P = T \oplus L$. Si $\mathcal{L}$ est semi-simple, tout automorphisme σ de $\mathcal{P}$ est tel que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Supposons que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{C}_A + \mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A$ avec $\mathcal{L}_A + \mathcal{M}_A \neq 0$. Si l'on remarque que l'algèbre $\mathcal{A}$ est abélienne, on en déduit que $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ est aussi abélienne. De plus, $\sigma(\mathcal{C})$ doit être un idéal de $\mathcal{P}$:

$$[\mathcal{P}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow [\mathcal{L}, \mathcal{A}] \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow [\mathcal{L}, \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A] \subseteq \mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$$

Par suite, $\mathcal{L}_A + \mathcal{L}'_A$ doit être un idéal abélien propre de $\mathcal{L}$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : $\mathcal{L}$ semi-simple.

Nous cherchons, maintenant, à déterminer la composante connexe du groupe des automorphismes de $\mathcal{P}$. Le lemme précédent nous permet d'écrire :

$$\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{C} + \sigma(\mathcal{L})$$

où $\sigma(\mathcal{L})$ est un sous-espace complémentaire de $\mathcal{C}$, i.e. $\sigma(\mathcal{L}) \cap \mathcal{C} = 0$, de plus $\sigma(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_B + \mathcal{M}_B$ avec $\mathcal{L}_B + \mathcal{L}'_B = \mathcal{L}$. Le théorème II-4 nous assure qu'il existe un automorphisme intérieur σ_0 qui applique $\mathcal{L}$ sur $\sigma(\mathcal{L})$. Puisque tout automorphisme connexe d'une algèbre de Lie semi-simple est un automorphisme intérieur [24], l'automorphisme $\tau = \sigma_0^{-1} \cdot \sigma$ est égal à l'opérateur identité lorsqu'on le restreint à $\mathcal{L}$.

.../...

$$\tau(\cdot) = \cdot +$$

et

$$\forall \ell, t; \tau[\ell, t] = [\tau(\ell), \tau(t)] = [\ell, \tau(t)]$$

étant semi-simple, sa représentation adjointe sur est complètement réductible (i.e) $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$. Si l'on note par $\text{ad}_i \ell$ l'action de l'élément ℓ sur $\mathfrak{g}_i$, on obtient

$$\tau \text{ad}_i \ell = \text{ad}_i \ell \tau \quad \forall \ell$$

Le lemme de Schur montre alors que τ est un multiple de l'identité lorsqu'on le restreint à $\mathfrak{g}_i$.

Théorème*

L'algèbre de Lie du groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie inhomogène $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{a}$, avec $\mathfrak{g}$ semi-simple, est isomorphe à $(\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{a}) \ltimes S$, où S est engendré par le générateur des dilatations dans chaque sous-espace $\mathfrak{g}_i$ invariant sous $\mathfrak{a}$, pourvu que la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}_i$ soit unique.

* Une généralisation de ce théorème est donnée dans [16].

APPENDICE B

Théorèmes sur les algèbres de Lie semi-simples

Théorème B-1

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle de dimension n , si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact, elle ne possède pas de sous-algèbre de dimension $n - 1$.

Théorème B-2

Une algèbre de Lie simple réelle, de dimension n , ne possède pas de sous-algèbre de dimension $n - 1$, sauf l'algèbre $SO(2,1)$ qui possède deux sous-algèbres de dimension 2.

Théorème B-3

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ une algèbre de Lie inhomogène réelle de dimension n , telle que $\mathfrak{k}$ soit simple et agisse irréductiblement sur $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ aura une sous-algèbre de dimension $n - 1$ si et seulement si $\mathfrak{k}$ est isomorphe à $SO(2,1)$ et/ou $\dim \mathfrak{p} = 1$.

Le lecteur vérifiera facilement ces théorèmes dans le cas des algèbres de Lie de Lorentz qui n'ont pas de sous-algèbres de dimension 5 et de Poincaré qui n'ont pas de sous-algèbres de dimension 9.

Dans cet appendice, nous donnerons une preuve complète de ces théorèmes. En fait, le théorème B-3 est une conséquence immédiate des théorèmes B-1, B-2 et du théorème III-6.

Notons par (x, y) la forme de Killing^(*) sur l'algèbre de Lie $\mathcal{A}$. L'invariance de cette forme est exprimée par la relation

$$([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0 \quad \forall x, y, z \quad (\text{B-1})$$

$\mathcal{B}$ étant un sous-espace de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^\perp$ est le sous-espace de $\mathcal{A}$, orthogonal à $\mathcal{B}$ (au sens de la forme de Killing)

$$\mathcal{B}^\perp = \{\beta \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B}, (\beta, b) = 0\} \quad (\text{B-2})$$

Cette définition peut être écrite sous la forme

$$(\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp) = 0 \quad (\text{B-3})$$

Dans le but de démontrer les théorèmes B-1 et B-2, nous rappellerons certains lemmes sur les algèbres de Lie réelles.

(*)

Si X_α ($\alpha = 1, \dots, n$) forment une base d'une algèbre de Lie

$$[X_\alpha, X_\beta] = r_{\alpha, \beta}^\mu X_\mu$$

la forme de Killing est définie par

$$(X_\alpha, X_\beta) = r_{\alpha, \mu} r_{\beta, \nu}^\mu X_\nu$$

où la sommation a lieu sur les indices répétés.

Lemme B-1

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux sous-espaces de l'algèbre de Lie réelle $\mathcal{A}$

$$i) \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}^\perp \subseteq \mathcal{B}^\perp$$

$$ii) (\mathcal{B} + \mathcal{C})^\perp = \mathcal{B}^\perp \cap \mathcal{C}^\perp$$

Lemme B-2

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux idéaux de l'algèbre de Lie réelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.

Lemme B-3

Si $\mathcal{B}$ est un idéal de l'algèbre de Lie réelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^\perp$ est aussi un idéal de $\mathcal{A}$.

Cette propriété est une conséquence de l'équation B-1, où $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$, $z \in \mathcal{B}^\perp$.

Lemme B-4

Si $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie réelle

$$i) [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{B}$$

$$ii) \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp \text{ est un idéal de } \mathcal{B}$$

Ce lemme se déduit de l'équation B-1 où $x, z \in \mathcal{B}$ et $y \in \mathcal{B}^\perp$ et du lemme B-2.

.../...

Lemme B-5

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle de dimension n

i) $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = (\mathcal{B}')^\perp = \mathcal{B}$

ii) $\dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{B}^\perp = n$

Ce lemme est une conséquence directe de la propriété de régularité de la forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple.

Lemme B-6

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle, tout idéal $\mathcal{B}$ est semi-simple.

Voir par exemple Helgason [30] p. 121.

Lemme B-7

Si $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact, pour tout sous-espace $\mathcal{B}$, on a la propriété $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp = 0$.

Cette propriété est liée au caractère défini positif de la forme de Killing dans ce cas.

Nous pouvons maintenant donner une démonstration des théorèmes B-1 et B-2.

.../...

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle de dimension n ($n > 3$, il n'existe pas d'algèbre semi-simple de dimension inférieure à 3). Supposons qu'il existe une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de dimension $n-1$. Si $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie compact, les lemmes B-5 et B-7 montrent que $\mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp = \mathcal{A}$ et que $\dim \mathcal{B}^\perp = 1$. Le lemme B-4 nous assure que $[\mathcal{B}, \mathcal{B}^\perp] = \mathcal{B}^\perp$, de plus $[\mathcal{B}^\perp, \mathcal{B}^\perp] = 0$. Ainsi $\mathcal{B}^\perp$ est un idéal abélien de $\mathcal{A}$, propriété qui est en contradiction avec le caractère semi-simple de $\mathcal{A}$. Ceci démontre le théorème B-1.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Lie simple de dimension n (> 3) et qu'il existe une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de dimension $n-1$. Nous devons envisager deux cas :

$$i) \quad \mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp = \mathcal{A}$$

Un raisonnement similaire au précédent montre que $\mathcal{B}^\perp$ est un idéal, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : $\mathcal{A}$ simple.

$$ii) \quad \mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp \neq \mathcal{A}$$

Dans ce cas, $\dim (\mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp) < n$ et $\mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp = \mathcal{B}$. Le lemme B-5 montre que $\dim \mathcal{B}^\perp = 1$ et le lemme B-4 nous assure que $\mathcal{B}^\perp$ est un idéal de $\mathcal{B}$. L'algèbre quotient $\mathcal{B}/\mathcal{B}^\perp$ est isomorphe à une sous-algèbre $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$ de dimension $n-2$, et $\mathcal{K} + \mathcal{B}^\perp = \mathcal{B}$. Le lemme B-4 montre que :

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}^\perp] \subseteq \mathcal{K}^\perp \quad (\text{B-4})$$

De plus $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$ implique $\mathcal{B}^\perp \subseteq \mathcal{K}^\perp$ et $[\mathcal{K}, \mathcal{B}^\perp] \subseteq \mathcal{B}^\perp$. D'autre part, $\mathcal{K} + \mathcal{B}^\perp = \mathcal{B}$ entraîne $\mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}^\perp$. En utilisant

.../...

le fait que $\mathcal{B}^\perp$ n'est pas contenu dans $\mathcal{K}$, on obtient :

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp = 0$$

et

$$\mathcal{K} + \mathcal{K}^\perp = \mathcal{A} \quad (\text{B-5})$$

Maintenant, on peut facilement montrer^(*) qu'il existe dans $\mathcal{K}^\perp$ un vecteur isotrope qui n'est pas contenu dans $\mathcal{B}^\perp$. Soit $\mathcal{C}^\perp$ cette direction isotrope. La relation $\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{K}^\perp$ implique $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C} \supset \mathcal{C}^\perp$ est de dimension $n-1$, nous obtenons

$$\mathcal{C} = \mathcal{K} + \mathcal{C}^\perp \quad (\text{B-6})$$

De plus $\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{K}^\perp$ implique (Eq. B-4)

$$[\mathcal{K}, \mathcal{C}^\perp] \subset [\mathcal{K}, \mathcal{K}^\perp] \subset \mathcal{K}^\perp \quad (\text{B-7})$$

L'équation B-1 avec $x, z \in \mathcal{C}^\perp$ et $y \in \mathcal{K}$ montre que

$$[\mathcal{K}, \mathcal{C}^\perp] \subset \mathcal{C} \quad (\text{B-8})$$

De B-7 et B-8, nous obtenons avec l'aide du lemme B-1 et de l'équation B-6

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{C}^\perp] \subset \mathcal{K}^\perp \cap \mathcal{C} = (\mathcal{K} + \mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}^\perp$$

Cette relation montre que $\mathcal{C}^\perp$ est un idéal de $\mathcal{C}$.

(*)

Soit $b_0 \in \mathcal{B}^\perp$ ($b_0 \neq 0$) et $x_0 \in \mathcal{K}^\perp$, $x_0 \notin \mathcal{B}^\perp$. Si $(x_0, x_0) \neq 0$, on peut toujours trouver un λ tel que $(x_0 + \lambda b_0, x_0 + \lambda b_0) = (x_0, x_0) + 2\lambda(x_0, b_0) = 0$. En effet $(x_0, b_0) = 0$ impliquerait l'orthogonalité de $\mathcal{B}^\perp$ avec $\mathcal{A}$, en contradiction avec le caractère semi-simple de $\mathcal{A}$.

.../...

Ainsi nous avons une symétrie complète entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\mathcal{B}, \mathcal{B}^+] \subseteq \mathcal{B}^+ & , \quad \mathcal{B}^+ \subseteq \mathcal{B} \\ [\mathcal{C}, \mathcal{C}^+] \subseteq \mathcal{C}^+ & , \quad \mathcal{C}^+ \subseteq \mathcal{C} \end{array} \right. \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{K} \quad (\text{B-9})$$

En appliquant la relation B-1 avec $x, y \in \mathcal{B}^+$ et $y \in \mathcal{C}^+$ (puis avec $x, z \in \mathcal{C}^+$, $y \in \mathcal{B}^+$) on obtient

$$\begin{aligned} [\mathcal{B}^+, \mathcal{C}^+] &\subseteq \mathcal{B} \\ [\mathcal{B}^+, \mathcal{C}^+] &\subseteq \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{B-10})$$

Ainsi

$$[\mathcal{B}^+, \mathcal{C}^+] \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{K} \quad (\text{B-11})$$

Le crochet $[\mathcal{B}^+, \mathcal{C}^+]$ ne peut être nul, sinon $\mathcal{K}^+$ serait un idéal abélien de $\mathcal{A}$, ce qui serait en contradiction avec les hypothèses.

Soit $\mathcal{S}$ la sous-algèbre de dimension 1 définie par

$$[\mathcal{B}^+, \mathcal{C}^+] = \mathcal{S} \quad (\text{B-12})$$

on a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$. Il est maintenant facile de vérifier en utilisant l'identité de Jacobi que $\mathcal{B}^+ + \mathcal{C}^+ + \mathcal{S}$ est un idéal de $\mathcal{A}$. La seule possibilité compatible avec les hypothèses est le cas $n=3$.

Le lemme B-6 impose que l'algèbre de Lie de dimension 3 engendrée par $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{S}$ soit semi-simple.

.../...

Les relations

$$[S, B^+] \in B^+$$

$$[S, E^+] \in E^+$$

(B-13)

imposent que cette algèbre de Lie soit celle de $SO(2,1)$,
ce qui démontre le théorème B-2.

APPENDICE C

Définition du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique extérieur homogène

Soit θ un paramètre d'évolution sans dimension, proportionnel au temps propre dans le cas des tardyons^{*}. Une ligne d'univers $x(\theta)$ est définie par $x(0)$, $\frac{dx}{d\theta}(0) = X x(0)$, où X est un opérateur sans dimension. Par intégration, nous obtenons

$$x(\theta) = e^{\theta X} x(0)$$

Une condition pour que $x(0)$ soit une trajectoire pour une particule chargée dans un champ homogène F , est que $\frac{d^2 x}{d\theta^2}$ soit proportionnel à $F \cdot \frac{dx}{d\theta}$, c'est-à-dire que $X^2 x(0)$ soit proportionnel à $F \cdot X x(0)$.

Il est clair que l'élément le plus général $X = \frac{e}{2} F^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + a_\mu P^\mu$ de l'algèbre de Lie du groupe Poincaré qui agit sur l'espace des x^λ ($\lambda = 0, 1, 2, 3$) de la façon suivante :

$$X x^\lambda = e F^{\lambda\mu} x_\mu + a^\lambda$$

satisfait une telle condition.

* On utilise la terminologie "tardyons" pour des particules de vitesse plus petite que c , les tachyons ont une vitesse supérieure à c et la vitesse des luxions est c .

Ainsi, il est possible de définir la ligne d'univers d'une particule dans un champ extérieur homogène $F_{\mu\nu}$, quel que soit son genre (tardyons, tachyons ou luxions) comme étant une orbite de l'espace de Minkowski sous un sous-groupe connexe de P de dimension 1.

Inversement, on peut montrer que chaque orbite représente une ligne d'univers pour une particule d'un certain genre dans un champ donné et avec des conditions initiales données.

APPENDICE D

1 - Quelques propriétés des tenseurs antisymétriques de rang 2

Dans cet appendice, nous rappellerons certaines propriétés des tenseurs antisymétriques de rang 2 sur l'espace temps de Minowski que nous supposerons rapporté à la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, sauf indication contraire. La métrique est donnée par $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, les autres termes g_{ij} étant nuls si $i \neq j$. Pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur aux références [4] [5] [45].

Les tenseurs antisymétriques de rang 2 forment un espace vectoriel de dimension 6 pour lequel les $e_\mu \wedge e_\nu$, $\mu < \nu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) fournissent une base. Nous noterons par F un tel tenseur et par $F^{\mu\nu}$ ses composantes dans la base $\{e_\mu \wedge e_\nu\}$.

Il est commode, dans certains calculs, de passer du formalisme quadridimensionnel au formalisme tridimensionnel^(*); dans ce but, nous définirons les quantités

$$\begin{aligned} E^i &= F^{0i} \\ B^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \end{aligned} \quad (D-1)$$

où ϵ^{ijk} est le tenseur de Kronecker, qui est égal à +1 si la permutation est paire, -1 si la permutation est impaire, et 0 dans les autres cas. On pose la convention $\epsilon^{123} = +1$.

(*)

Il est possible de passer de la formulation covariante au formalisme tridimensionnel sans faire usage d'indices, seule la vitesse unitaire n du repère dans lequel la décomposition a lieu intervient. La relation (A-1) correspondant au cas d'une base dans le vecteur du genre-temps est précisé-ment le vecteur n [BAC 5] ch.7 § 5.

Nous pouvons alors écrire $F = (\vec{E}, \vec{B})$ où $\vec{E}$ est appelé partie électrique et $\vec{B}$ partie magnétique.

Dans ces notations, les deux quantités invariantes sous le groupe de Lorentz s'écrivent

$$\begin{aligned}\Delta(F) &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 \\ \phi(F) &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = 2\vec{E}\vec{B}\end{aligned}\tag{D-2}$$

où F^* est défini par

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\tag{D-3}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ étant le tenseur de Kronecker de rang 4 avec la convention $\varepsilon_{0123} = 1$. Remarquons que $(F^*)^* = -F$.

Il est bien connu [45] p.28, que tout tenseur antisymétrique de rang 2 sur l'espace de Minkowski peut se mettre sous la forme

$$F = a \wedge b + c \wedge d\tag{D-4}$$

a, b, c, d étant des vecteurs de M .

On dira qu'un tel tenseur est plan si on peut l'écrire sous la forme

$$F = a \wedge b\tag{D-5}$$

Nous appellerons F-plan le 2-plan engendré par les deux quadrivecteurs a et b . Il existe dans ce cas une application des tenseurs plan sur l'ensemble des sous-espaces de M de dimension 2.

.../...

D'autre part $\phi(F) = 0$ ($\det|F^{\mu\nu}| = 0$) si et seulement si F est plan ([45] p.29). Nous pouvons donc classer les tenseurs plan suivant les types de F -plan, c'est-à-dire du signe de $\Delta(F)$:

$\Delta(F) > 0$ genre magnétique , le F -plan est du genre espace
 $\Delta(F) < 0$ genre électrique , le F -plan est du genre temps
 $\Delta(F) = 0$ genre lumière , le F -plan est du genre tangent.

Nous donnerons maintenant certains théorèmes importants relatifs aux tenseurs antisymétriques de rang 2.

Théorème (D-1)

Si F est plan, F^* l'est aussi.

Théorème (D-2) ([4] p.89)

F étant un tenseur plan

- i) si F est du genre magnétique, F^* est du genre électrique et inversement. Le F -plan et le F^* -plan sont complémentaires.
- ii) si F est du genre lumière, F^* l'est aussi. Le F -plan et le F^* -plan engendrent un hyperplan tangent.
 (Le sous-espace de M de dimension 3 contenant comme direction du genre lumière la direction du genre lumière commune au F -plan et au F^* -plan).

Théorème (D-3) ([5] p.264)

Si F est un tenseur antisymétrique de rang 2, orthogonal à un vecteur k ($k.F = 0$), le tenseur est plan.

.../...

Théorème (D-4) ([9] appendice)

Tout tenseur réel antisymétrique F de rang 2 sur l'espace de Minkowski M peut s'écrire sous la forme

$$F = i\beta e_+ \wedge e_- + \varepsilon e \wedge e'$$

où $e_{\pm}$ sont des quadrivecteurs complexes tels que

$$e_+^2 = e_-^2 = 0, \quad e_+ e_- = -1$$

et e, e' sont des quadrivecteurs réels tels que

$$e^2 = e'^2 = 0, \quad e, e' = 1$$

De plus $e_+ e = e_+ e' = e - e = e - e' = 0$

Les scalaires réels β et ε sont donnés par

$$\beta = \sqrt{\frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \phi^2}}{2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \phi^2}}{2}}$$

et vérifient

$$F.e = \varepsilon e$$

$$F.e_+ = i\beta e_+$$

$$F.e' = -\varepsilon e'$$

$$F.e_- = -i\beta e_-$$

La démonstration de ce théorème consiste à diagonaliser le tenseur F . Les valeurs propres étant les racines de l'équation

$$\text{Det} (F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0$$

Théorème (D-5) ([9] appendice)

F étant plan

i) Si F est du genre magnétique, il peut s'écrire

$$F = i\beta e_{\gamma} \wedge e_{\delta} \quad \text{avec } \beta = \sqrt{-\Delta}$$

ii) Si F est du genre électrique, il peut s'écrire

$$F = \varepsilon e_{\gamma} \wedge e_{\delta} \quad \text{avec } \varepsilon = \sqrt{-\Delta}$$

iii) Si F est du genre lumière, il peut s'écrire

$$F = a\Lambda\ell \quad \text{où } \ell^2 = a.\ell = 0, \quad a^2 < 0$$

Dans chaque cas, les vecteurs du $F^{\times}$ -plan sont les vecteurs propres de F correspondant à la valeur propre 0.

De ces théorèmes, on peut facilement déduire les résultats suivants.

Théorème (D-6)

Si F est un tenseur plan et x un quadrivecteur quelconque

i) Le vecteur $F.x$ appartient au F-plan

ii) Il existe un quadrivecteur y tel que $x - Fy$ appartienne :

$\alpha)$ au $F^{\times}$ -plan si $\Delta(F) \neq 0$

$\beta)$ à un plan complémentaire du plan de F si $\Delta(F) = 0$.

Nous avons vu que les tenseurs plan peuvent être classés selon le signe de $\Delta(F)$. Nous rappellerons maintenant la classification des tenseurs antisymétriques de rang 2 à l'aide des signes des quantités $\Delta(F)$ et $\phi(F)$.

Une manière simple de considérer le problème est d'utiliser l'isomorphisme signalé au chapitre I, entre le groupe de Lorentz et $SO(3, C)$ qui agit sur l'espace de bivecteurs $\vec{F} = B + iE$. Les bivecteurs peuvent être classés selon le signe des parties réelles et imaginaires de $\vec{F}^2 = \Delta(F) + i\phi(F)$

$\Delta(F) > 0$: genre magnétique

$\Delta(F) < 0$: genre électrique

$\Delta(F) = 0$: genre lumière

Le signe de $\phi(F)$ donne une indication sur l'angle des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$\phi(F) > 0$: angle aigu (ou nul)

$\phi(F) < 0$: angle obtus (ou plat)

$\phi(F) = 0$: angle droit

Il y a 9 catégories de bivecteurs correspondant à 9 régions du plan complexe.

Si l'on utilise la propriété qu'étant donné 2 bivecteurs de même longueur $\vec{F}$ et $\vec{F}'$, il existe toujours une rotation complexe transformant $\vec{F}$ en $\vec{F}'$, les conséquences suivantes sont immédiates :

1) Si $\phi(F) \neq 0$, on peut rendre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ colinéaires par une transformation de Lorentz.

.../...

ii) Si $\phi(F) = 0$, trois cas se présentent :

a) $\Delta(F) > 0$, par une transformation de Lorentz on peut annuler $\vec{E}$

b) $\Delta(F) < 0$, par une transformation de Lorentz on peut annuler $\vec{B}$

c) $\Delta(F) = 0$, quelle que soit la transformation de Lorentz envisagée, on aura toujours

$$|\vec{E}| = |\vec{B}| \quad \text{et} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

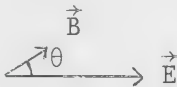
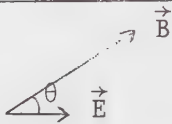
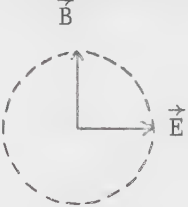
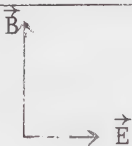
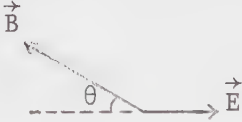
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$\Phi > 0$	 on peut annuler θ	 on peut annuler θ	 on peut annuler θ
$\Phi = 0$	 on peut annuler $\vec{B}$		 on peut annuler $\vec{E}$
$\Phi < 0$	 on peut annuler θ	 on peut annuler θ	 on peut annuler θ

TABLEAU D-1

2 - Solution de $F.x = 0$

En utilisant les théorèmes précédents, nous pouvons sans difficulté résoudre l'équation

$$F^{\mu\nu} x_\nu = 0$$

où F est un tenseur antisymétrique de rang 2. Les solutions sont discutées dans le tableau ci-après.

Genre de F		Solutions	Genre de F [*] .x	
ϕ(F) ≠ 0		x = 0	F [*] .x = 0	
ϕ(F) = 0 F ≠ 0 (F et F [*] sont plans et ortho- gonaux)	Δ(F) > 0 F-plan est du genre espace	x = 0	F [*] .x = 0	
		x ≠ 0 x ∈ F [*] -plan (F [*] -plan est hyperbolique)	x ² > 0 x ² = 0 x ² < 0	(F [*] .x) ² < 0 (F [*] .x) ² = 0 avec F [*] .x ≠ 0 (F [*] .x) ² > 0
		x = 0	F [*] .x = 0	
	Δ(F) < 0 F-plan est hyperbolique	x ≠ 0 x ∈ F [*] -plan (F [*] -plan est du genre espace)	x ² < 0	(F [*] .x) ² < 0
		x = 0	F [*] .x = 0	
	Δ(F) = 0 F-plan est tangent	x ≠ 0 x ∈ F [*] -plan (F [*] -plan est tangent)	x ² = 0 x ² < 0	F [*] .x = 0 (F [*] .x) ² = 0 avec F [*] .x ≠ 0
F = 0		x arbitraire	F [*] .x = 0	

TABLEAU D-2 : Solutions de $F^*.x = 0$

3 - Solution de $Fx = \pm x$

Nous avons à rechercher les x , vecteurs propres de F , avec les valeurs propres ± 1 . Le théorème (D-4) nous assure que x est nécessairement nul ou du genre lumière. Les valeurs propres de F sont solution de l'équation

$$\det (F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \phi^2}$$

En remplaçant λ par ± 1 , on obtient la condition

$$\phi^2 - 4\Delta = 4$$

Il s'ensuit que l'équation $Fx = \pm x$ n'a de solution différente de 0 que si une des deux conditions suivantes est vérifiée

$$i) \phi(F) = 0$$

$$ii) \Delta(F) = -1$$

4 - Solution de $G\Delta F = 0$ et $G\Delta F = F$

Nous cherchons les tenseurs G antisymétriques de rang 2 qui sont les solutions de l'équation $G\Delta F = 0$, ou $G\Delta F = F$, où F est donné.

Au chapitre 6, nous avons déjà défini la notation $G\Delta F$ par

$$(G\Delta F)_{\mu\nu} = G_{\mu\rho} F^\rho_\nu - G_{\nu\rho} F^\rho_\mu \quad (D-6)$$

(la sommation se faisant sur les indices répétés).

.../...

La solution de la première équation est donnée par le théorème suivant.

Théorème (D-7) [9]

Le produit contracté de deux tenseurs antisymétriques $G \Delta F$ de rang 2, ($F \neq 0$) est nul, si et seulement si G est une combinaison linéaire de F et F^* .

Pour trouver les solutions de l'équation $G \Delta F = F$, nous énoncerons quelques lemmes qui nous permettront de donner une démonstration covariante du théorème (D-8).

Lemme D-1

A, B et C étant trois tenseurs antisymétriques de rang 2

$$(A \Delta B) \cdot C = (B \Delta C) \cdot A = (C \Delta A) \cdot B \quad (D-7)$$

Lemme D-2

A et B étant deux tenseurs antisymétriques de rang 2

$$A_{\alpha\beta}^* B^{\alpha\beta}_{\lambda} = \beta_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}_{\lambda} + \frac{1}{2} (A \cdot B) g_{\alpha\lambda} \quad (D-8)$$

Lemme D-3

F étant un tenseur antisymétrique de rang 2

- i) $F \cdot x = F^* \cdot x = 0$ et $x \neq 0 \Rightarrow \phi(F) = \Delta(F) = 0$ et $x^2 = 0$
- ii) $\phi(F) = \Delta(F) = 0 \Rightarrow \exists x \neq 0$, unique à un facteur multiplicatif près, tel que $x^2 = 0$ et $Fx = F^*x = 0$.

.../...

Lemme 4

A et B étant deux tenseurs antisymétriques de rang 2

$$(A \wedge B)^* = A^* \wedge B = A \wedge B^* \quad (D-9)$$

Théorème (D-8)

Etant donné un tenseur antisymétrique F non nul,
l'équation $G \wedge F = F$ implique

$$\Delta(F) = \phi(F) = 0$$

$$\phi(G) = 0, \quad \Delta(G) = -1$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$G = G_0 + \alpha F + \beta F^*$$

où G_0 est une solution particulière, α et β deux nombres réels.
En contractant les deux membres de l'équation

$$(G \wedge F = F) \quad (D-10)$$

successivement par F et F^* , nous déduisons à l'aide du lemme (D-1) et du théorème (D-7) que $\Delta(F) = \phi(F) = 0$.

En contractant, maintenant, la même équation successivement par G et G^* , nous obtenons :

$$F.G = F G^* = 0 \quad (D-11)$$

d'où nous déduisons

$$F^*.G^* = F^*G = 0 \quad (D-12)$$

.../...

Remarquons que si G est solution de (D-10), G est aussi solution de

$$G \Delta (G \Delta F) = F \quad (D-13)$$

Du lemme (D-2) et des équations (D-11) et (D-12), nous obtenons

$$G \Delta (G \Delta F) = - \Delta(G)F + \phi(G)F^* \quad (D-14)$$

Il découle alors de l'équation D-13) que

$$\Delta(G) = -1 \quad \text{et} \quad \phi(G) = 0$$

Nous devons maintenant, étudier la solution générale G de l'équation (D-10). Il est clair que si G_0 est une solution, $G_0 + \alpha F + \beta F^*$ (α et β étant réels) est aussi solution d'après le théorème (D-7). Nous pouvons maintenant donner la forme des tenseurs F et G .

Le lemme D-3 nous assure de l'existence d'un vecteur du genre lumière ℓ ($\ell^2 = 0$) unique, à un facteur multiplicatif près, tel que

$$F \cdot \ell = F^* \ell = 0 \quad (D-15)$$

Par suite

$$(G \Delta F) \cdot \ell = 0 \quad (D-16)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$F \cdot (G, \ell) = 0 \quad (D-17)$$

.../...

Du lemme D-4, nous déduisons que si G est solution de l'équation (D-10), alors G est aussi solution de

$$G \wedge F^* = F^* \quad (D-18)$$

Il s'ensuit que

$$F^* \cdot (G, \ell) = 0 \quad (D-19)$$

Des équations (D-17) et (D-19), nous déduisons

$$G \cdot \ell = \lambda \ell$$

le tableau (D-1) montre que λ ne peut pas être nul.

D'après le théorème (D-5), F et G ont les formes suivantes :

$$F = \ell \wedge a \quad \text{avec } \ell^2 = \ell \cdot a = 0, \quad a^2 < 0$$

$$G = \ell \wedge \ell' \quad \text{avec } \ell'^2 = 0$$

L'équation (D-10) montre que $\ell \cdot \ell' = 1$.

APPENDICE E

Transformations infinitésimales

Soit F un champ électromagnétique invariant sous le groupe de Lie à un paramètre dont un élément est $(a, L) \cdot P$. En utilisant l'équation (IX-5)

$$F^{\mu\nu}(Lx + a) = L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x)$$

on peut déduire, dans le cas d'une transformation infinitésimale ($L = 1 + \omega$)

$$\omega \Delta F(x) + (x, \omega \cdot \nabla) F(x) - (a \cdot \nabla) F(x) = 0 \quad (E-1)$$

où

$$(\omega \Delta F)_{\mu\nu} = \omega_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} - \omega_\nu{}^\lambda F_{\lambda\mu}$$

et

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}, - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \quad \text{avec} \quad x = (x^0, \vec{x})$$

En posant

$$\begin{cases} F = (\vec{E}, \vec{B}) \text{ avec } E^i = F^{0i} \text{ et } B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \\ \omega = (\vec{\phi}, \vec{\theta}) \text{ avec } \phi^i = \omega^{0i} \text{ et } \theta^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \end{cases} \quad (E-2)$$

l'équation (E-1) peut être écrite

$$\begin{aligned} \vec{\phi} \times \vec{B} + \vec{\theta} \times \vec{E} + (\vec{x} \cdot \vec{\phi}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (t\vec{\phi} + \vec{x} \times \vec{\theta}) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{E} - (a \cdot \nabla) \vec{E} &= 0 \\ \vec{\theta} \times \vec{B} - \vec{\phi} \times \vec{E} + (\vec{x} \cdot \vec{\theta}) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (t\vec{\theta} + \vec{x} \times \vec{\phi}) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{B} - (a \cdot \nabla) \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (E-3)$$

Du lemme D-4, nous déduisons que si G est solution de l'équation (D-10), alors G est aussi solution de

$$G \wedge F^* = F^* \quad (D-18)$$

Il s'ensuit que

$$F^*.(G.\ell) = 0 \quad (D-19)$$

Des équations (D-17) et (D-19), nous déduisons

$$G \cdot \ell = \lambda \ell$$

Le tableau (D-1) montre que λ ne peut pas être nul.

D'après le théorème (D-5), F et G ont les formes suivantes :

$$F = \ell \wedge a \quad \text{avec } \ell^2 = \ell.a = 0, \quad a^2 < 0$$

$$G = \ell \wedge \ell' \quad \text{avec } \ell'^2 = 0$$

L'équation (D-10) montre que $\ell.\ell' = 1$.

APPENDICE E

Transformations infinitésimales

Soit F un champ électromagnétique invariant sous le groupe de Lie à un paramètre dont un élément est (a, L) P. En utilisant l'équation (IX-5)

$$F^{\mu\nu}(Lx + a) = L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} F^{\rho\sigma}(x)$$

on peut déduire, dans le cas d'une transformation infinitésimale ($L = 1 + \omega$)

$$\omega \Delta F(x) + (x \cdot \omega \cdot \nabla) F(x) - (a \cdot \nabla) F(x) = 0 \quad (E-1)$$

où

$$(\omega \Delta F)_{\mu\nu} = \omega_{\mu}^{\lambda} F_{\lambda\nu} - \omega_{\nu}^{\lambda} F_{\lambda\mu}$$

et

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}, - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \quad \text{avec } x = (x^0, \vec{x})$$

En posant

$$\begin{cases} F = (\vec{E}, \vec{B}) \text{ avec } E^i = F^{0i} \text{ et } B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \\ \omega = (\vec{\phi}, \vec{\theta}) \text{ avec } \phi^i = \omega^{0i} \text{ et } \theta^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \end{cases} \quad (E-2)$$

l'équation (E-1) peut être écrite

$$\begin{aligned} \vec{\phi} \times \vec{B} + \vec{\theta} \times \vec{E} + (\vec{x} \cdot \vec{\phi}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (t\vec{\phi} + \vec{x} \times \vec{\theta}) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{E} - (a \cdot \nabla) \vec{E} &= 0 \\ \vec{\theta} \times \vec{B} - \vec{\phi} \times \vec{E} + (\vec{x} \cdot \vec{\phi}) \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (t\vec{\phi} + \vec{x} \times \vec{\theta}) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \vec{B} - (a \cdot \nabla) \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (E-3)$$

Nous pouvons, maintenant, écrire les équations correspondant à des champs invariants respectivement sous J_z , K_z , J_f et A_x . Pour cela, nous définissons

$$\begin{aligned} F_{\pm} &= E_x \pm B_y \\ G_{\pm} &= E_y \pm B_x \end{aligned} \quad (E-4)$$

Nous obtenons

i) invariance sous $SO(2)$, $\{J_z\}$

En posant $\vec{\phi} = 0$ et $\vec{\theta} = (0,0,1)$ dans (E-3), on obtient

$$\begin{aligned} G_+ - DF_- &= 0 \\ G_- - DF_+ &= 0 \\ F_- + DG_+ &= 0 \\ F_+ + DG_- &= 0 \\ DE_z = DB_z &= 0 \end{aligned} \quad D = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

ii) invariance sous $L(1,1)$, $\{K_z\}$

On pose $\vec{\phi} = (0,0,1)$ et $\vec{\theta} = 0$; on obtient

$$\begin{aligned} F_+ - DF_+ &= 0 \\ F_- + DF_- &= 0 \\ G_+ + DG_+ &= 0 \\ G_- - DG_- &= 0 \\ DE_z = DB_z &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} D &= \eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \text{avec } \eta &= t+z, \quad \zeta = t-z \end{aligned}$$

.../...

iii) invariance sous F_f , $\{J_f = \cos f/2 J_z - \sin f/2 K_z\}$

$$G_- + \phi F_+ - DF_+ = 0$$

$$G_+ + \phi F_- + DF_- = 0$$

$$F_- + \phi G_+ + DG_+ = 0$$

$$F_+ + \phi G_- + DG_- = 0$$

$$DE_z = DB_z = 0$$

$$D = \phi \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\phi = \operatorname{tg} f/2, \quad \eta = t+z, \quad \zeta = t-z$$

iv) invariance sous $A(1)$, $\{A_x = K_x - J_y\}$

$$2E_z + DF_+ = 0$$

$$2B_z + DG_- = 0$$

$$F_- - DE_z = 0$$

$$G_+ - DB_z = 0$$

$$DG_+ = DF_- = 0$$

$$D = 2x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\eta = t+z, \quad \zeta = t-z$$

APPENDICE F

Ondes planes électromagnétiques et symétriques

Nous nous limitons dans cet appendice aux ondes planes progressives, c'est-à-dire aux champs électromagnétiques apparaissant dans le vide en l'absence de charges, et dépendant seulement de la variable $\xi = t-z$, si l'on choisit l'axe des z comme direction de propagation.

Ainsi, un tel champ est au moins invariant sous $T^0(3)$. De cette sous $T^0(3)$ et des équations de Maxwell, on déduit

$$\begin{aligned} E_z &= C^{te} \\ B_z &= C^{te} \\ F_- &= E_x - B_y = C^{te} \\ G_+ &= E_y + B_x = C^{te} \end{aligned} \quad (F-1)$$

En étudiant séparément chaque sous-groupe connexe G du groupe de Poincaré, de dimension inférieure ou égale à 6, tel que $\mathcal{C}_G = \mathcal{L}^0(3)$, nous pouvons déduire que les groupes $G\{\mathcal{L}^0(3), J_z\}$ et $G\{\mathcal{L}^0(3), J_z, K_z\}$ sont sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{L}(4), J_z, K_z\}$, alors que $G\{\mathcal{L}^0(3), A_x + P_t + P_z, A_y\}$ est un sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{L}(4), A_x, A_y\}$. $G\{\mathcal{L}^0(3), A_x\}$ est sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{L}^0(3), A_x, A_y\}$ et $G\{\mathcal{L}^0(3), K_z, A_x\}$ est un sous-C.E.P.S. de $G\{\mathcal{L}^0(3), K_z, A_x, A_y\}$.

Les champs solutions de ces C.E.P.S. ont été donnés dans les tableaux (IX-1) et IX-2), ainsi que les solutions correspondant à $G\{\mathcal{L}^0(3), J_f, A_x, A_y\}$ et $G\{\mathcal{L}^0(3), A_x, A_y, J_z + \varepsilon(P_t + P_z)\}$, $\varepsilon = \pm 1$.

.../...

Enfin, les solutions générales de $G\{\mathcal{C}^0(3), J_z + \varepsilon(P_t + P_z)\}$, $\varepsilon = \pm 1$, $G\{\mathcal{C}^0(3), K_z\}$ et $G\{\mathcal{C}^0(3), J_f\}$ diffèrent respectivement des solutions de $G\{\mathcal{C}^0(3), A_x, A_y, J_z + \varepsilon(P_t + P_z)\}$, $\varepsilon = \pm 1$, $G\{\mathcal{C}^0(3), K_z, A_x, A_y\}$ et $G\{\mathcal{C}^0(3), J_f, A_x, A_y\}$ seulement pour les valeurs des composantes E_z et B_z qui ne sont pas nécessairement nulles.

Avant de terminer cet appendice, nous pouvons remarquer que, dans le cas général où nous n'imposons pas que le champ F se propage dans le vide en absence de charge, l'invariance sous $T^0(3)$ et les équations de Maxwell impliquent

$$J_x = J_y = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial E}{\partial z} = J_z = \rho$$

En rejetant le cas non physique $J_z = \rho = C^{te}$, nous obtenons pour ρ et J_z une équation du type

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = 0$$

qui correspond à des particules chargées de masse nulle.

- [1] R. ARENS. J. Math. Phys. 12, 2415 (1971)
- [2] H. BACRY. "Classical Hamiltonian Formalisme for Spin". Argonne Preprint 1966.
- [3] H. BACRY. Comm. Math. Phys. 5, 97 (1967).
- [4] H. BACRY. Lectures in theoretical Physics Vol.9A, New York (1967).
- [5] H. BACRY. "Leçon sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires". Gordon and Breach (1967).
- [6] H. BACRY, J. NUYTZ. Phys. Rev. 157, 1471 (1967).
- [7] H. BACRY, N.P. CHANG. Ann. Phys. 47, 426 (1966).
- [8] H. BACRY, A. KILBERG. J. Math. Phys. 10, 2132 (1969).
- [9] H. BACRY, Ph.COMBE, J.L. RICHARD. Nuovo Cim. 67 A, 267 (1973). Pour le cas galiléen, voir Nuovo Cim. 70A, 289 (1970) et J. KUBAR-ANDRE Nuovo Cim. 15A, 577 (1973).
- [10] H. BACRY, Ph.COMBE, P. SORBA. A paraître dans Rep. Math. Phys. preprints Marseille 72/P.449 et 72/P.488.
- [11] K. BARDAKCI, M. HALPERN. Phys. Rev. 176, 1686 (1968).
- [12] V. BARGMANN, E.P. WIGNER. Proc. Nat. Acad. Sc. 34, 211 (1948).
- [13] A. BIERI, A. JANNER. Physica 50, 573 (1970).
- [14] A. BOREL. Ann. of Math. 64, 66 (1956).
- [15] L.S. BROWN, T.W.B. KIBBLE. Phys. Rev. 133, A 705 (1970).
- [16] G. BURDET, M. PERRIN, P. SORBA. A paraître J. Math. Phys. (Juillet 1975).
- [17] E. CARTAN. "Les groupes réels simples, finis et continus". Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.(3) 31, 263-355 (1914).
- [18] A. CHAKRABARTI. J. Math. Phys. 7, 426 (1966).

- [19] CHOU KUONG-CLAU, L.G. ZASTRAVENKO. Zh. Exp. i theo. Fiz. 35, 1417 (1958) - (Soviet. phys. J.E.T.P. 8, 990 (1959).
- [20] Ph. COMBE, J.L. RICHARD. Physica 71, 66 (1974).
- [21] Ph. COMBE, P. SORBA. Préprint Marseille 73/P.555.
- [22] G. DFRZKO. J. R. A. S. 118, A 393 (1974)
- [23] J. DOZIAS. Thèse de 3ème cycle : "Sur les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension inférieure ou égale à 5". Paris 1963
- [24] E. DYNKIN. Trudy-Moskov. Mat. Obsč. 1, 39-166 (1952). American Mathematical Society, trans. ser. 2, 6, 245-378 (1957).
- [25] D. FINKELSTEIN. Phys. Rev. 100, 924 (1955).
- [26] L. L. FOLDY. Phys. Rev. 102, 549 (1956).
- [27] G. FUCHS, P. RENUARD. J. Math. Phys. 11, 2617 (1970). G. FUCHS (Thèse - Orsay 1969).
- [28] I.M. GUELFAND, M.I. GRAEV, N.Ya. VILENKIN. "Generalized Functions", Vol. 5, p. 284 - Acad. Press, New York and London (1966).
- [29] H. HAMERMESH. Ann. Phys. (N.Y.) 9, 518 (1960).
- [30] S. HELGASON. "Differential geometry and Symmetry spaces" Acad. Press (1962).
- [31] G.J. IVERSON, G. MACK. J. Math. Phys. 11, 1581 (1970).
- [32] N. JACOBSON. "Lectures on Abstract Algebra", vol.II, p. 188 (D. von Nostrand) (1953).
- [33] N. JACOBSON. "Lie Algebras". Interscience Publishers London (1965) p. 11-14.

- [34] A. JANNER, E. ASHER. *Physica* 48, 425 (1970).
- [35] A. JANNER, E. ASHER. *Helv. Phys. Acta* 43, 296 (1970).
- [36] A. JANNER, E. ASHER. *Physica* 54, 77 (1971).
- [37] T. JANSSEN, A. JANNER, E. ASHER. *Physica* 41, 541 (1969) ; 42, 41 (1969).
- [38] H. JOOS, R. SCHRADER. *Comm. Math. Phys.* 7, 21 (1968).
- [39] A. KILBERG. *Arkiv. Phys.* 28, 121 (1964) ; 32, 263 (1966). *Nuovo Cim.* 53, 592 (1968).
- [40] G.I. KUZNETZOV, M.A. LIBERMAN, A.B. MAKAROV, Ya.A. SMORODINSKY. *Yudernaya Fizika (URSS)* 10, 644 (1969).
- [41] S. LANG. "Algebra" p. 399. Addison Wesley (1965).
- [42] W. LASSENER. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Karl-Marx-Universität* 4, 463 (1972).
- [43] J.M. LEVY-LEBLOND. *J. Math. Phys.* 4, 776 (1963); voir aussi "Group Theory and its applications (E.M. Loeb1 Ed.), Vol. 2, Acad. Press N.Y.
- [44] J.M. LEVY-LEBLOND. *Comm. Math. Phys.* 12, 64 (1969).
- [45] A. LICHNEROWICZ. "Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie". Edizioni Cremonese, Roma (1955),
- [46] J.S. LOMONT, M.E. MOSES. *J. Math. Phys.* 5, 294 (1964); 5, 1438 (1964), 6, 670 (1965).
- [47] F. LURÇAT. *Physics* 1, 95 (1964).
- [48] N.W. MACFADYEN. Carnegie Mellon University, preprint.
- [49] N.W. MACFADYEN. *J. Math. Phys.* 12, 492 (1971).
- [50] M. MEBKHOUT. Thèse, Marseille (1968).

.../...

- [51] M.E. MOSES. J. Math. Phys. 6, 928 (1965) ; 6, 1244 (1965);
6, 2014 (1965).
- [52] M. MUKUNDA. J. Math. Phys. 8, 2210 (1967).
- [53] M. MUKUNDA. J. Math. Phys. 9, 532 (1968).
- [54] G.M. MOUBARAKZIANOW. Matemathka 1 (32), 114 (1963).
- [55] M.A. NAIMARK. Lineĭniĭe Predstavleina Groupii Lorentsa
U.M.N. 9 (1954).
Linear representations of the Lorentz groups A.M.S.T.
Series 2, Vol. 6 (1957) p. 379-458.
- [56] J. NUYTS. Trieste IC/69/54.
- [57] J.L. RICHARD. Nuovo cim. 8 A, 485, N.3 (1972)
Phys. Rev. D 5, 2650 (1972).
- [58] A. SCIARRINO, M. TOLLER. J. Math. Phys. 8, 1252 (1967).
- [59] R. SEARS. "Internal quantum number and homogeneous
Preprint 71-74 (Goteborg 1971).
- [60] I.S. SHAPIRO. Dokl. Akad. Nowk. OSSR 4, 647 (1955) ;
Soviet. Phys. Doklody 1, 91 (1956).
- [61] R. SHAW. Quart. J. Math. Oxford(2) 21, 101 (1970).
- [62] Ya.M. SHIROKOV. Zh. exp. i theo. Fiz. 33, 861, 1196,
1208 (1957). (Soviet. Phys. J.E.T.P. 6, 664, 919, 929
(1958)).
- [63] D. SOPER. Thèse Stanford 1971, SLAC-137-UC 34(TH)
- [64] P. SORBA. "Connected subgroups of the Galilei and exten-
ded Galilei groups" preprint Marseille (1974).
- [65] J.M. SOURIAU. "Structure des systèmes dynamiques",
ch.III § 14, p. 180 Dunod (1970).
- [66] L. SUSSKIND. Phys. Rev. 165, 1535 (1968), ibid 165,
1547 (1968).

- [67] E.P. WIGNER. Ann. Math. 40, 149 (1939).
- [68] E.P. WIGNER. Lecture of the Istambul Summer School of theoretical physics (Gürsey 1962).
- [69] P. WINTERNITZ, I. FRIS[✓]. Soviet. Journ. Nucl. Phys. 1, 636 (1965).

D E U X I E M E P A R T I E

Particule élémentaire dans un champ constant et uniforme.

H. BACRY, *et al.*

21 Maggio 1970

Il Nuovo Cimento

Serie X, Vol. 67 A, pag. 267-299

Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field.

I. - The Relativistic Particle in a Constant and Uniform Field.

H. BACRY and PH. COMBE (*)

Centre Universitaire de Marseille - Luminy

J. L. RICHARD (*)

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. - Marseille

(ricevuto il 22 Dicembre 1969)

(*) Postal address: Centre de Physique Théorique, C.N.R.S., 31, chemin Joseph-Aiguier, Marseille.

Summary. — Two subgroups of the Poincaré group are shown to play a particular role in the case of charged systems in an external electromagnetic field which is constant and uniform. Projective representations of these subgroups involve the electric charge as a generator of a phase factor. Additivity and superselection rules for charge appear as direct consequences.

1. — Introduction.

Every physicist is now familiar with the way WIGNER ⁽¹⁾ defined the concept of elementary particle from continuous unitary irreducible ray representations (CUIRR) of the Poincaré group, the kinematical group of Minkowski space-time. Under this point of view, it is natural to look for a group-theoretical definition of particles when they are subjected to a given external electromagnetic field (EMF); our hope is to introduce the electromagnetic form factors in a way similar to that by which mass and spin appear in the CUIRR of the Poincaré group. In the present paper, only a part of our aim is reached: the

⁽¹⁾ E. P. WIGNER: *Ann. of Math.*, **40**, 149 (1939).

electric charge occurs in the form of the generator of a phase factor, *like the mass operator in the CUIRR of the Galilei group* ⁽²⁾. Two important consequences are derived:

i) *additivity of charge* (analogous to the additivity of mass in nonrelativistic mechanics),

ii) *the superselection rule for the electric charge* which follows from group-theoretical considerations, as the Bargmann superselection rule for the Galilean mass follows from properties of the Galilei group.

When a given EMF is present, the Poincaré symmetry of space-time is broken; nevertheless, it is clear that, in some cases, this breaking is not complete and the symmetry properties which are still present can be used to get some information on « kinematics » of charged particles. We define the « *kinematical* » group of the problem as the subgroup of the Poincaré group which leaves invariant the EMF under consideration. Various « kinematical » groups can be defined, but, obviously, the largest ones will provide us with the maximum of information. Now, some of the largest ones are associated with a constant and uniform EMF and it is natural to begin with them. The present paper is devoted to the six-dimensional « kinematical » groups corresponding to relativistic constant and uniform electromagnetic fields. It is important to note that the method we are using here, can be used for any other « kinematical » group, continuous or not.

Once the « kinematical » groups are known and their main properties investigated, we must look for their CUIRR. A great help is furnished by a nice generalization of the Noether theorem obtained by TASSIE and BUCHDAHL ⁽³⁾. These authors were interested in the search of constants of motion relative to symmetry properties when the Lagrangian is not invariant under the corresponding transformations. As an example let us consider the case of translational invariance. If the Lagrangian is invariant under translations, we know, from Noether's theorem, that the components of $\mathbf{p}$ are constants of the motion. TASSIE and BUCHDAHL make a distinction between the three following properties:

- i) the p_i 's are the conjugate momenta of space translations,
- ii) they are conserved quantities,
- iii) they are the components of the linear momentum.

In a uniform EMF, it is clear that translational invariance is still present, but three distinct vectors can be defined, one for each property stated above.

⁽²⁾ V. BARGMANN: *Ann. of Math.*, **59**, 1 (1954).

⁽³⁾ L. J. TASSIE and H. A. BUCHDAHL: *Austral. Journ. Phys.*, **17**, 431 (1964); **18**, 109 (1965).

It is essential to note that the p_i 's are no longer represented by commuting conserved quantities, although they generate an Abelian group. Such a situation is not new in physics: the Lagrangian for a free nonrelativistic particle is *not* invariant under Galilean boosts, but it is well known that boost symmetry implies the conservation of the center-of-mass position $\mathbf{x}$. More precisely, the generators of the boosts $\mathbf{K}$ are represented by $m\mathbf{x}$, where m is the mass operator. Now, boosts and translations commute in the Galilei group

$$[K_i, P_j] = 0$$

but their representative on the wave function Hilbert space do not:

$$[mx_i, P_j] = im\delta_{ij}.$$

True representations of the Galilei group describe zero-mass particles, since nontrivial ray representations are associated with particles with mass ^(2,4). A similar property will be derived for the electric charge: true representations of the « kinematical » group correspond to particles with zero charge and some nontrivial ray representations will be associated with charged particles.

In Sect. 2, the « kinematical » group corresponding to various constant and uniform EMF are described with the aid of their Lie algebras in covariant and noncovariant notation.

In Sect. 3, we use both classical and quantum-mechanical arguments in order to find the physical « kinematical » groups, that is to say the central extensions which will provide us with the physical ray representations. Interpretations are given of generators and invariants of the Lie algebras, in relation with Noether's theorem and Klein-Gordon and Dirac equations. The superselection rule for electric charge follows.

Section 4 is devoted to the true representations of the physical « kinematical » groups, i.e. ray representations of the « kinematical » groups, with the aid of some work by STREATER on the so-called oscillator group ⁽⁵⁾. The relevance of the present work is discussed and criticized in a conclusion.

Three Appendices have been added in order to make clear some aspects of the problem under consideration.

2. - The « kinematical » group.

We intend to show, in this Section, that the « kinematical » group (KG) of a constant and uniform EMF is a six-dimensional Lie group, the structure

⁽⁴⁾ J. M. LEVY-LEBLOND: *Journ. Math. Phys.*, **4**, 776 (1963).

⁽⁵⁾ R. F. STREATER: *Commun. Math. Phys.*, **4**, 217 (1967).

of which depending on the kind of field we are interested in. It is quite clear that the KG contains as a subgroup, the group of space-time translations. We must examine how the Lorentz groups acts on a given field F , that is to say on a given skew-symmetric tensor of rank two. In other words, we must look for the orbits of the Lorentz group on the space of skew-symmetric tensors of rank two and classify them according to their stability groups. The stability group will be the « homogeneous » part of the KG.

Consider an infinitesimal Lorentz transformation

$$(2.1) \quad A = 1 + \omega .$$

The field F turns into

$$(2.2) \quad F' = F + \omega \wedge F ,$$

where

$$(2.3) \quad (\omega \wedge F)_{\mu\nu} = \omega_{\mu}^{\lambda} F_{\lambda\nu} - \omega_{\nu}^{\lambda} F_{\lambda\mu} .$$

Lemma. The product of two skew-symmetric tensors of rank two, $\omega \wedge F$ ($F \neq 0$), is zero, if and only if ω is a linear combination of F and $F^*(F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta})$.

Proof. Set

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = (E, B) \text{ with } F' = F^{0i}, \quad B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, \\ \omega = (\varphi, \theta) \text{ with } \varphi^i = \omega^{0i}, \quad \theta^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk}, \end{array} \right. \quad (g^{00} = -g^{ii} = 1) .$$

A simple calculation leads to

$$(2.5) \quad \omega \wedge F = (\varphi \times B + \theta \times E, \theta \times B - \varphi \times E) .$$

It is well known that with each tensor, one can associate a complex three-vector in the following way:

$$(2.6) \quad F \rightarrow F = B + iE, \quad \omega \rightarrow \omega = \theta + i\varphi .$$

One gets

$$(2.7) \quad \omega \wedge F \rightarrow (\theta + i\varphi) \times (B + iE) = \omega \times F ,$$

a form which makes apparent the isomorphism between $SO_{3,c}$ and the Lorentz

group. Now, the vector product $\omega \times F$ is zero if and only if ω is parallel to F :

$$(2.8) \quad \epsilon + i\varphi = (\alpha + i\beta)(B + iE),$$

where α and β are arbitrary real numbers. This means that ω is a real linear combination of $B + iE$ and $E - iB$ or, equivalently, that the tensor ω is a linear combination of tensor $F = (E, B)$ and $F^* = (-B, E)$.

It readily follows, from our lemma and eq. (2.2), that the stability group of a given field F is of dimension two; denoting by $M_{\mu\nu}$ the generators of the Lorentz group, those of the stability group are

$$(2.9) \quad G = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad G^* = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} F^{*\mu\nu},$$

and it can be easily checked, from the brackets

$$(2.10) \quad [M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] = i(g_{\nu\rho} M_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho} M_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} M_{\mu\rho} + g_{\mu\lambda} M_{\nu\rho})$$

that the stability group is Abelian:

$$(2.11) \quad [G, G^*] = 0.$$

Since the Lorentz group and the stability group are of dimension six and two, respectively, the dimension of the orbits is *four* (except, of course, the trivial orbit corresponding to $F=0$, an orbit of dimension zero). This is in agreement with the existence of two invariants built on F , namely

$$(2.12) \quad \Delta(F) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = B^2 - E^2,$$

$$(2.13) \quad \Phi(F) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 2E \cdot B.$$

Hereafter, we give a résumé of the main properties of skew-symmetric tensor of rank two. All these properties are stated in an Appendix.

To each value of $F^2 = \Delta + i\Phi$, corresponds only *one* orbit, except for the value $F^2 = 0$ which is associated with *two* orbits, one of them being the trivial orbit $F=0$. The stability groups of the orbits $F^2 \neq 0$ are all conjugate; consequently, from this point of view, the orbits are classified in three classes (*):

a) $F^2 \neq 0$. For such a field, there exist Lorentz basis for which the vectors E and B are parallel, say along the z -axis (as a peculiar case, one of the two vectors vanishes, if F^2 is real). It is quite evident that, for such observers, the

(*) The space of tensors is the union of three strata: a stratum is the union of all orbits, the stability groups of which are conjugate.

stability subgroup is generated by J_3 , the generator of rotations around the z -axis and by K_3 , the generator along the z -axis; moreover, the magnitudes ε of $\mathbf{E}$ and β of $\mathbf{B}$, measured by these observers, can be expressed in terms of the two invariants Δ and Φ .

For an arbitrary observer, the stability subgroup is a conjugate subgroup of that generated by J_3 and K_3 . Its generators G and G^* are related to $\mathbf{J}$ and $\mathbf{K}$ in the following way:

$$(2.14) \quad G = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{K},$$

$$(2.15) \quad G^* = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}.$$

If $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are along the z -axis, one gets

$$(2.16) \quad G = \beta J_z - \varepsilon K_z,$$

$$(2.17) \quad G^* = \varepsilon J_z + \beta K_z,$$

$$(2.18) \quad J_z = (\beta G + \varepsilon G^*) / \varepsilon^2 + \beta^2,$$

$$(2.19) \quad K_z = (\beta G^* - \varepsilon G) / \varepsilon^2 + \beta^2.$$

b) $\mathbf{F}^2 = 0$ with $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are orthogonal, with the same magnitude, whatever is the observer; there exist observers for which $\mathbf{E}$ is, for instance, along the x -axis and $\mathbf{B}$ along the y -axis. From eqs. (2.14) and (2.15), which are still valid, one gets

$$(2.20) \quad G = (J_y - K_x)E,$$

$$(2.21) \quad G^* = (J_x + K_y)E,$$

where $E = |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

c) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are zero and the stability group is the Lorentz group itself.

Coming back to our definition of KG, we readily see that there are three corresponding kinds of KG, the last one (case *c*) being the Poincaré group itself. The KG associated with cases *a*) and *b*) are both six-dimensional, *but they are not isomorphic*; nevertheless it is possible to put their Lie algebras in the same form

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} [G, G^*] = 0, \\ [G, P_\mu] = -iF_{\mu\nu}P^\nu, \\ [G^*, P_\mu] = -iF_{\mu\nu}^*P^\nu, \\ [P_\mu, P_\nu] = 0, \end{array} \right. \quad (\text{cases } a) \text{ and } b),$$

where we made use of the Poincaré Lie brackets

$$(2.23) \quad [M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu).$$

Equations (2.22) describe, in a manifestly covariant way, the six-dimensional KG. In specific Lorentz basis, the forms are simpler:

a) When $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ can be chosen in the z -direction (case a)), the Lie algebra takes the form

$$(2.24) \quad \begin{cases} [J_z, P_x] = iP_y, & [K_z, P_x] = -iP_t, \\ [J_z, P_y] = -iP_x, & [K_z, P_y] = -iP_z, \end{cases} \quad (\text{case } a)),$$

all other brackets vanishing. It is easy to see that the KG is a direct product of two groups: one isomorphic to the Euclidean group E_2 , generated by J_z, P_x and P_y and one isomorphic to the pseudo-Euclidean group $E_{1,1}$ generated by K_z, P_t and P_z .

b) If $\mathbf{E}$ is along the x -axis and $\mathbf{B}$ along the y -axis (case b)), the Lie algebra reads

$$(2.25) \quad \begin{cases} [J_y - K_x, P_t + P_z] = 2iP_x, & [J_x + K_y, P_t + P_z] = -2iP_y, \\ [J_y - K_x, P_x] = i(P_t - P_z)[J_x + K_y, P_y] = -i(P_t - P_z), \end{cases} \quad (\text{case } b)),$$

all other brackets in the basis $J_y - K_x, J_x + K_y, P_x, P_y, P_t + P_z, P_t - P_z$, are zero.

3. - The physical « kinematical » groups.

According to the postulates of quantum theory, we must find *ray* representations of the KG defined by eqs. (2.22). Among them, the *true* representations and the double-valued ones will be shown to be associated with uncharged particles. The other ones, often known as *nontrivial ray representations*, are true representations of a local *central extension* of the group under consideration. There exist many central extensions of the groups (2.22) but we are interested in those which have natural physical interpretation; in order to find them, we will use classical as well as quantum mechanical arguments. In Sect. 5, we will discuss the other central extensions which occur.

3'1. *Classical analysis.* — First, let us recall the Noether-Tassie-Buchdahl theorem (3). Let

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$$

be a Lagrangian such that under the infinitesimal transformation

$$(3.2) \quad q_k \rightarrow q'_k = q_k + \varepsilon u_k(q_j, t),$$

this Lagrangian becomes

$$(3.3) \quad \mathcal{L}'(q'_k, \dot{q}'_k, t) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) + \varepsilon \dot{X}(q_k, t),$$

where $\dot{X}$ denotes the total derivative, with respect to time, of an arbitrary function X . The theorem states that

$$(3.4) \quad H = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L}' = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

is a constant of the motion.

We apply this theorem to the case of the relativistic motion of a particle in a constant and uniform EMF, *i.e.* to the Lagrangian

$$(3.5) \quad \mathcal{L}(x) = m\sqrt{\dot{x}^2} + eA_\mu \dot{x}^\mu.$$

Consider an infinitesimal translation ε^ν

$$(3.6) \quad x^\nu \rightarrow x'^\nu = x^\nu + \varepsilon^\nu.$$

The change of $\mathcal{L}$ is

$$(3.7) \quad \delta \mathcal{L} = e \varepsilon^\mu \partial_\mu A_\nu \dot{x}^\nu =: \varepsilon^\mu \dot{X}_\mu,$$

with

$$(3.8) \quad X_\mu = e(A_\mu + x^\nu F_{\nu\mu}).$$

According to (3.4), the four conserved quantities associated with the translations are

$$(3.9) \quad \tilde{\pi}_\mu = p_\mu - e(A_\mu + x^\nu F_{\nu\mu}).$$

These quantities will be interpreted later.

Now, consider an infinitesimal Lorentz transformation

$$(3.10) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu.$$

The variation of $\mathcal{L}$ is

$$(3.11) \quad \delta \mathcal{L} = e \omega^{\mu\nu} [A_\mu \dot{x}_\nu + \partial_\mu A_\nu \dot{x}^\mu x_\nu],$$

which is easily written in the form

$$(3.12) \quad \delta \mathcal{L} = \omega^{\mu\nu} \dot{X}_{\mu\nu} - \frac{e}{2} \dot{x}^\mu x^\nu (\omega \wedge F)_{\mu\nu},$$

with

$$(3.13) \quad X_{\mu\nu} = e [A_\mu x_\nu - \frac{1}{2} x^\alpha x_\nu F_{\alpha\mu}].$$

According to our lemma of Sect. 2, $\delta \mathcal{L}$ is a total derivative if and only if $\omega^{\mu\nu} = \varepsilon F^{\mu\nu}$ or $\omega^{\mu\nu} = \varepsilon F^{*\mu\nu}$. The corresponding constants of the motion are

$$(3.14) \quad \begin{cases} I' = \frac{1}{2} \left[x_\mu \left(p_\nu - e A_\nu - \frac{e}{2} x^\alpha F_{\alpha\nu} \right) - x_\nu \left(p_\mu - e A_\mu - \frac{e}{2} x^\alpha F_{\alpha\mu} \right) \right] I'^{\mu\nu}, \\ I^{*'} = \frac{1}{2} \left[x_\mu \left(p_\nu - e A_\nu - \frac{e}{2} x^\alpha F_{\alpha\nu} \right) - x_\nu \left(p_\mu - e A_\mu - \frac{e}{2} x^\alpha F_{\alpha\mu} \right) \right] I^{*\mu\nu}. \end{cases}$$

Define the following Poisson bracket of two dynamical variables u and v as

$$(3.15) \quad \{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_\alpha}, \quad \{x_\alpha, p_\beta\} = -g_{\alpha\beta}.$$

One readily obtains the following relations between the conserved quantities (3.9) and (3.14):

$$(3.16) \quad \begin{cases} \{I', I^{*'}\} = 0, \\ \{I', \tilde{\pi}_e\} = -F_{e\nu} \tilde{\pi}^\nu, \\ \{I^{*'}, \tilde{\pi}_e\} = -F_{e\nu}^* \tilde{\pi}^\nu, \\ \{\tilde{\pi}_e, \tilde{\pi}_\nu\} = -F_{e\nu} e. \end{cases}$$

The observables $I', I^{*'}, \tilde{\pi}_e$ and the electric charge e , form a Lie algebra which is a central extension of the Lie algebra (2.22); in fact, as we will see later, (3.16) provides us with many central extensions of the two groups defined by (2.22).

a) $F^2 = A + i\Phi \neq 0$. E and B can be chosen along the z -axis. It is convenient to define two new quantities J and K , as in (2.16) and (2.17):

$$(3.17) \quad I' = \beta J - \varepsilon K, \quad I^{*'} = \varepsilon J + \beta K.$$

The Lie algebra (3.16) becomes

$$(3.18) \quad \begin{cases} \{J, \tilde{\pi}_x\} = \tilde{\pi}_y, & \{K, \tilde{\pi}_z\} = -\tilde{\pi}_t, \\ \{J, \tilde{\pi}_y\} = -\tilde{\pi}_x, & \{K, \tilde{\pi}_t\} = -\tilde{\pi}_z, \\ \{\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y\} = -\beta e, & \{\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z\} = -\varepsilon e. \end{cases}$$

According to the two last relations, three nonisomorphic physical extensions of (2.24) are possible, namely:

$$\begin{array}{llll} a_1) & \beta \neq 0 & \text{and} & \varepsilon \neq 0 & (\Phi \neq 0), \\ a_2) & \beta \neq 0 & \text{and} & \varepsilon = 0 & (\Phi = 0), \\ a_3) & \beta = 0 & \text{and} & \varepsilon \neq 0 & (\Phi = 0). \end{array}$$

It is easy to check that multiplying β or (and) ε by arbitrary numbers provides us with isomorphic Lie algebras.

b) $F^2 = \Delta + i\Phi = 0$, $F \neq 0$. Choose E in the x -direction and B in the y -direction. Let

$$(3.19) \quad I' = \alpha_x E, \quad I^* = -\alpha_y E, \quad \tilde{\pi}^+ = \frac{\tilde{\pi}_t + \tilde{\pi}_z}{2}, \quad \tilde{\pi}^- = \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_z.$$

The Lie algebra (3.16) becomes

$$(3.20) \quad \begin{cases} \{\alpha_x, \tilde{\pi}^+\} = \tilde{\pi}_x, & \{\alpha_y, \tilde{\pi}^+\} = \tilde{\pi}_y, \\ \{\alpha_x, \tilde{\pi}^-\} = \tilde{\pi}^-, & \{\alpha_y, \tilde{\pi}^-\} = \tilde{\pi}^-, \\ \{\tilde{\pi}^+, \pi_x\} = -Ee. \end{cases}$$

A boost along the z -axis changes the value of E but leads to an isomorphic Lie algebra. Consequently, there is only one physical central extension of (2.25).

All Lie algebras of the physical « kinematical » groups are given in Table I.

We turn our attention to the interpretation of the conserved quantities I , I^* and $\tilde{\pi}_\mu$. First, we note that, if the gauge is chosen covariantly, *i.e.*

$$(3.21) \quad A_\mu = -\frac{1}{2} x^\alpha F_{\alpha\mu},$$

one gets

$$(3.22) \quad I = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad I^* = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} F^{*\mu\nu},$$

where π_μ denote the components of the « kinetic » linear momentum

$$(3.23) \quad M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu.$$

TABLE I. - Lie algebras of the physical « kinematical » groups and their fundamental invariants.

All cases	Case a_1 ($\Phi \neq 0$)	Case a_2 ($\Phi = 0, \Delta > 0$)	Case a_3 ($\Phi = 0, \Delta < 0$)	Case b ($\Phi = \Delta = 0$)
Covariant notation	$\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ along the z -axis	$\mathbf{B}$ along the z -axis, $\mathbf{E} = 0$	$\mathbf{E}$ along the z -axis, $\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E}$ along the x -axis $\mathbf{B}$ along the y -axis
$[L, \tilde{\pi}_q] = -iF_{qv}\tilde{\pi}^v$	$[J, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}_y$ $[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$	$[J, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}_y$ $[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$	$[J, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}_y$ $[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$	$[\alpha_x, \tilde{\pi}^+] = i\tilde{\pi}_x$ $[\alpha_y, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}^-$
$[L^*, \tilde{\pi}_q] = -iF_{qv}^*\tilde{\pi}^v$	$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = -i\beta Q$ $[K, \tilde{\pi}_i] = -i\tilde{\pi}_z$	$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = -i\beta Q$ $[K, \tilde{\pi}_i] = -i\tilde{\pi}_z$	$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = 0$ $[K, \tilde{\pi}_i] = -i\tilde{\pi}_z$	$[\alpha_y, \tilde{\pi}^+] = i\tilde{\pi}_y$ $[\alpha_y, \tilde{\pi}_y] = i\tilde{\pi}^-$
$[\tilde{\pi}_q, \tilde{\pi}_r] = -iF_{qv}Q$	$[K, \tilde{\pi}_z] = -i\tilde{\pi}_t$ $[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = -i\epsilon Q$	$[K, \tilde{\pi}_z] = -i\tilde{\pi}_t$ $[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = 0$	$[K, \tilde{\pi}_z] = -i\tilde{\pi}_t$ $[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = -i\epsilon Q$	$[\tilde{\pi}^+, \tilde{\pi}_x] = -iEQ$
Invariants Q	Invariants Q	Invariants Q	Invariants Q	Invariants Q
$M^2 = \tilde{\pi}^2 + 2Q\Gamma$				$M^2 = \tilde{\pi}^2 + 2Q\alpha_x E$
$C = (F^* \cdot \tilde{\pi})^2 + \Phi Q \Gamma^*$	$\frac{C - \epsilon^2 M^2}{\epsilon^2 + \beta^2} = 2\epsilon Q K - \tilde{\pi}_t^2 + \tilde{\pi}_z^2$ $\frac{C + \beta^2 M^2}{\epsilon^2 + \beta^2} = 2\beta Q J - \tilde{\pi}_x^2 - \tilde{\pi}_y^2$	$\frac{C}{\beta^2} = -(\tilde{\pi}_t^2 - \tilde{\pi}_z^2)$ $\frac{C + \beta^2 M^2}{\beta^2} = 2\beta Q J - \tilde{\pi}_x^2 - \tilde{\pi}_y^2$	$\frac{C - \epsilon^2 M^2}{\epsilon^2} = 2\epsilon Q K - \tilde{\pi}_t^2 + \tilde{\pi}_z^2$ $\frac{C}{\epsilon^2} = -(\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2)$	$M^2 = \tilde{\pi}^2 + 2Q\alpha_x E$ $C = -E^2(\tilde{\pi}^-)^2$

On the other hand, the $\tilde{\pi}_\mu$'s become

$$(3.24) \quad \tilde{\pi}_\mu = p_\mu + eA_\mu.$$

The meaning of the constants of the motion, I , I^* and $\tilde{\pi}_\mu$, is more understandable if we consider the two particular cases we have mentioned above:

a) **E** and **B** along the z -axis:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = (\beta I + \varepsilon I^*) / \varepsilon^2 + \beta^2 = x\pi_y - y\pi_x + \frac{e}{2} \beta (x^2 + y^2), \\ K = (\beta I^* - \varepsilon I) / \varepsilon^2 + \beta^2 = t\pi_z - z\pi_t - \frac{e}{2} \varepsilon (t^2 - z^2), \\ \tilde{\pi}_x = \pi_x - e\beta y, \\ \tilde{\pi}_y = \pi_y + e\beta x, \\ \tilde{\pi}_z = \pi_z - e\varepsilon t, \\ \tilde{\pi}_t = \pi_t - e\varepsilon z. \end{array} \right.$$

(Equations (3.25) are independent of the gauge: they are derived from eqs. (3.14).)

a₁) When $\Phi \neq 0$, the projection of the world-line on the (x, y) -plane is a circle and that on the (z, t) -plane is a hyperbola. The origin of space-time can be chosen in such a way that the equations of motion obey the two conditions (*)

$$(3.26) \quad x^2 + y^2 = \text{const}, \quad t^2 - z^2 = \text{const}.$$

Moreover, the motion in the (x, y) -plane is uniform. Therefore, it is clear that the « kinetic » angular-momentum $x\pi_y - y\pi_x$ with respect to the centre of the circle is a constant of the motion. The observable J , in eq. (3.25) appears as a sum of two conserved quantities (**). However, it is much less evident that J is a constant of motion when another origin in space-time is chosen.

a₂) If $\varepsilon = 0$, one can write

$$(3.27) \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Now K vanishes and J is interpreted as in case a₁).

(*) See Appendix B, eq. (B.8).

(**) These two quantities commute.

a_3) If $\beta = 0$, one knows, from Appendix B, that the projections satisfy the relations

$$(3.28) \quad y = 0, \quad t^2 - z^2 = \text{const.}$$

J vanishes and K is interpreted as in case a_1).

b) E along the x -axis, B along the y -axis ($\Phi = A = 0$). One easily finds

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_x = x(\pi_t - \pi_z) - (t - z)\pi_x + \frac{e}{2}(t - z)^2 F, \\ \alpha_y = y(\pi_t - \pi_z) - (t - z)\pi_y, \\ \tilde{\pi}_x = \pi_x - eE(t - z), \\ \tilde{\pi}_y = \pi_y, \\ \frac{\tilde{\pi}_t + \tilde{\pi}_z}{2} = \frac{\pi_t + \pi_z}{2} - eEr, \\ \tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_z = \pi_t - \pi_z. \end{array} \right.$$

It is a result of Appendix B that, in particular Lorentz frames, α_x and α_y vanish.

3'2. Quantum-mechanical analysis. - Consider a wave equation

$$(3.30) \quad \mathcal{D}\psi = 0,$$

where $\mathcal{D}$ is a matrix of differential operators, acting on the set of components of $\psi(x)$. A Poincaré transformation

$$(3.31) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

induces a transformation $U(A, a)$ on the operator $\mathcal{D}$:

$$(3.32) \quad \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' = U(A, a)\mathcal{D}U^{-1}(A, a).$$

The wave equation will be said to be invariant under the transformation (3.31), if there exists a matrix $K(x)$, free of differential operators, such that

$$(3.33) \quad \mathcal{D}' = \exp[-i\varepsilon K(x)]\mathcal{D}\exp[i\varepsilon K(x)].$$

In the case of an infinitesimal Poincaré transformation $1 + i\varepsilon M$ generated by M , the conditions (32) and (33) read

$$(3.34) \quad \varepsilon[K + M, \mathcal{D}] = 0.$$

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

Let us apply this condition to the Dirac operator

$$(3.35) \quad \mathcal{D} = \gamma \cdot (p - eA) - m.$$

i) *translations*: one must find a matrix $K_\mu(x)$ such that

$$(3.36) \quad \varepsilon^\mu [K_\mu(x) + p_\mu, \gamma \cdot (p - eA) - m] = 0,$$

with

$$(3.37) \quad p_\mu = i\partial_\mu.$$

One gets

$$(3.38) \quad [K_\mu, \gamma^\nu](p_\nu - eA_\nu) - i\gamma^\nu \partial_\nu K_\mu - e i\gamma^\nu \partial_\mu A_\nu = 0.$$

Since the term in p_ν must vanish identically, the bracket $[K_\mu, \gamma^\nu]$ must be zero, so K is a multiple of the unit matrix. A simple integration gives the solution

$$(3.39) \quad K_\mu = -e(A_\mu + x^\nu F_{\nu\mu})$$

(up to an additive constant). Consequently, $K(x) + p$ takes the form

$$(3.40) \quad \tilde{\pi} = p - eA - ex \cdot F$$

as in the classical case (eq. (3.9)).

ii) *Lorentz transformations*. The infinitesimal transformation

$$(3.41) \quad U = 1 + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} \left(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right)$$

implies for $K_{\mu\nu}(x)$ the condition

$$(3.42) \quad \omega^{\mu\nu} [K_{\mu\nu} + x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}, \gamma \cdot (p - eA) - m] = 0.$$

First, by identifying terms in p_μ , one shows that $K_{\mu\nu}$ must be a multiple of the unit matrix. We are left with the equation

$$(3.43) \quad \omega^{\mu\nu} \{ \gamma^\rho [\partial_\rho K_{\mu\nu} + e(x_\mu \partial_\nu A_\rho - x_\nu \partial_\mu A_\rho)] + e(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu) \} = 0.$$

Multiplying by γ^λ and taking the trace, one gets, after some transformations,

$$(3.44) \quad \omega^{\mu\nu} \partial_\lambda [K_{\mu\nu} + ex_\mu(A_\nu + \frac{1}{2} x^\sigma F_{\sigma\nu}) - ex_\nu(A_\mu + \frac{1}{2} x^\sigma F_{\sigma\mu})] = \frac{e}{2} (F \wedge \omega)_{\lambda\rho} x^\rho.$$

According to our lemma of Sect. 2, this equation has two solutions corresponding to $\omega^{\mu\nu}$ proportional to $F^{\mu\nu}$ or to $F^{*\mu\nu}$, namely

$$(3.45) \quad \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = -\frac{e}{2} \left[x_\mu \left(A_\nu + \frac{1}{2} x^\sigma F_{\sigma\nu} \right) - x_\nu \left(A_\mu + \frac{1}{2} x^\sigma F_{\sigma\mu} \right) \right] \omega^{\mu\nu}$$

($\omega^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ or $F^{*\mu\nu}$)

and the generators of the physical subgroup are

$$(3.46) \quad I' = \frac{1}{2} \left[x_\mu \left(p_\nu - e A_\nu - \frac{e}{2} x^\sigma F_{\sigma\nu} \right) - x_\nu \left(p_\mu - e A_\mu - \frac{e}{2} x^\sigma F_{\sigma\mu} \right) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right] F^{\mu\nu},$$

$$(3.47) \quad I^* = \frac{1}{2} \left[x_\mu \left(p_\nu - e A_\nu - \frac{e}{2} x^\sigma F_{\sigma\nu} \right) - x_\nu \left(p_\mu - e A_\mu - \frac{e}{2} x^\sigma F_{\sigma\mu} \right) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right] F^{*\mu\nu},$$

which have the same expressions as in classical mechanics *except for an additional term describing the spin*.

There is an important difference between our classical and quantum-mechanical investigations of the physical group. In classical mechanics, we used Noether's theorem to find *conserved quantities* associated with Poincaré transformations. In quantum mechanics, we looked directly for *generators of an invariance group*. It was not even sure *a priori* that we would get similar quantities. Moreover, we obtained more information in the latter analysis since spin was involved there, but ignored in the first one.

Nevertheless, it is possible to give a Lagrangian derivation of eqs. (3.40), (3.46), (3.47), similar to the classical derivation. One has to use a theorem analogous to the Noether-Tassie-Buehdahl one, a theorem which is proved in Appendix C. The quantities $\tilde{\psi} \tilde{\pi}_\mu \psi$, $\tilde{\psi} I' \psi$ and $\tilde{\psi} I^* \psi$ are shown to be conserved quantities, *i.e.* divergenceless.

Before looking for the irreducible representations of the seven-dimensional physical « kinematical » groups, it is natural to examine some of their mathematical properties and to examine some physical implications.

3'3. The superselection rule for electric charge. — The translation generators (3.40) are not commuting since

$$(3.48) \quad [\tilde{\pi}_\mu, \tilde{\pi}_\nu] = -i F_{\mu\nu} Q,$$

where Q denotes the generator of the electric-charge gauge transformations. Consider two states ψ_1 and ψ_2 , eigenstates of Q with eigenvalues e_1 and e_2 , respectively. Perform successively an arbitrary number of translations, the product of which is the null translation. According to (3.48), ψ_1 and ψ_2 are multiplied

by phase factors, namely

$$(3.49) \quad \psi_i \rightarrow \psi'_i = \psi_i \exp [ie_i \varphi],$$

where φ depends on $F_{\mu\nu}$.

Translational invariance implies that $\psi_1 + \psi_2$ and $\psi'_1 + \psi'_2$ have the same norm; it is the case if and only if $e_1 = e_2$. We have proved, in this way, that *translational invariance implies the superselection rule for electric charge*. The argument is completely analogous with that of Bargmann for the Galilean mass.

3'4. The invariants of the Lie algebra. — It is easy, using the Poisson brackets (3.16), to find all invariants of the Lie algebras of the physical KG. They are three in number, namely

$$(3.50) \quad \begin{cases} Q, \\ M^2 = \tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu + 2QI', \\ C = (F^* \cdot \tilde{\pi})^2 + \Phi QI'^*, \end{cases}$$

where Q stands for e and Φ is given by (2.13). Only the interpretation of the two first invariants is simple: Q is the electric charge operator and M^2 is the squared mass operator. This last property can be shown in the following way. Consider both Klein-Gordon and second-order Dirac equations in an external EMF. They read

$$(3.51) \quad \begin{cases} [(p - eA)^2 - M^2] \psi = 0, \\ \left[(p - eA)^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - M^2 \right] \psi = 0. \end{cases}$$

By use of (3.40), it is possible to get a unique way of writing these two equations. One obtains

$$(3.52) \quad [\tilde{\pi}^2 + 2QI' - M^2] \psi = 0,$$

which proves that the second invariant is the squared mass operator, *whatever may be the spin*, 0 or $\frac{1}{2}$.

The third invariant C has a less trivial interpretation. One can see what it means in the classical case (spinless particle). One gets, in case *a*),

$$C = -\varepsilon^2(\pi_x^2 + \pi_y^2) - \beta^2(\pi_t^2 - \pi_z^2).$$

The two invariants $C - \varepsilon^2 M^2$ and $C + \beta^2 M^2$ have a simple interpretation:

$$C - \varepsilon^2 M^2 = -(\varepsilon^2 + \beta^2)(\pi_t^2 - \pi_z^2), \quad C + \beta^2 M^2 = -(\varepsilon^2 + \beta^2)(\pi_x^2 + \pi_y^2).$$

Consequently the lengths of relativistic speeds in the (t, z) -plane and the (x, y) -plane are invariants. But, contrarily to the first two invariants, C does not characterize a particle. We will examine this point in the Conclusion.

In Table I are given the three invariants, in each case, in terms of the generators of the Lie algebra.

It is a remarkable fact that all three invariants are Lorentz scalars.

4. - Continuous representations of the physical « kinematical » groups.

4.1. *General structure.* - The Lie algebras of all physical KG are given in Table I, column I. It is easy to see that each of them is a semi-direct sum of the Abelian subalgebra $\mathcal{R}$ spanned by I and I^* and the Lie algebra $\mathcal{N}$ spanned by the $\tilde{\pi}_\mu$'s and Q . Therefore, the physical KG is a semi-direct product and we can make use of Mackey's theory to find the representations induced by those of N , the group generated by $\mathcal{N}$. It can be shown that one can get in this way all continuous representations of the physical KG.

N is a nilpotent group since

$$(4.1) \quad [\mathcal{N}, [\mathcal{N}, \mathcal{N}]] = 0.$$

Consequently, Kirillov's method can be used to get its representations. Nevertheless, the structures of the Lie algebras of case $a)$ are so simple that we can use some known results to get their representations. In fact, one needs for these cases the knowledge of representations of the following groups:

i) E_2 , the Euclidean group of the 2-dimensional space with positive-definite metric;

ii) $E_{1,1}$, the pseudo-Euclidean group of the 2-dimensional space with hyperbolic metric;

iii) $\text{Osc}_{1,0}$, the one-dimensional oscillator group, already investigated by STREATER⁽⁵⁾ with the aid of Kirillov's method⁽⁶⁾. Its Lie algebra is spanned by $\hbar, q, p$ and H with the following commutators:

$$(4.2) \quad \begin{cases} [q, p] = i\hbar, \\ [\hbar, H] = [\hbar, q] = [\hbar, p] = 0, \\ [H, q] = -ip, \quad [H, p] = iq. \end{cases}$$

(6) G. W. MACKEY: *Induced Representations*. Chicago Lectures (1955).

iv) $\text{Osc}_{0,1}$, which we choose to call the one-dimensional pseudo-oscillator group. Its Lie algebra is defined as in (4.2), by a change of sign in the last bracket

$$(4.3) \quad [H, q] = -ip, \quad [H, p] = -iq.$$

It is natural to define, in a general way, the N -dimensional oscillator group $\text{Osc}_{(n, N-n)}$, generated by $\hbar, q_i, p_i$ and H_i as follows:

$$(4.4) \quad \begin{cases} [q_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij}, \\ [\hbar, H_i] = [\hbar, q_i] = [\hbar, p_i] = 0, \\ [H_i, q_i] = -ip_i, \quad [H_i, p_i] = i\varepsilon_i q_i, \end{cases}$$

where $\varepsilon_i = 1$ if $1 \leq i \leq n$ and $\varepsilon_i = -1$ if $n+1 \leq i \leq N$. The group $\text{Osc}_{(n, N-n)}$ is obviously $(3N+1)$ -dimensional. As we shall see, it plays a natural role in the N -dimensional oscillator problem.

A look on Table I shows us that the physical KG of cases $a_1), a_2), a_3)$ are isomorphic to $\text{Osc}_{1,1}$, $\text{Osc}_{1,0} \times E_{1,1}$ and $E_2 \times \text{Osc}_{0,1}$, respectively. According to the results of Sect. 2, each of them is a central extension of the direct product $E_2 \times E_{1,1}$, a group isomorphic to the KG of case $a)$ (*). Moreover $\text{Osc}_{1,0} \times E_{1,1}$ and $E_2 \times \text{Osc}_{0,1}$ are obtained through contracting from $\text{Osc}_{1,1}$.

4.2. *Faithful representations of $\text{Osc}_{(n, N-n)}$.* — Let us first recall Streater's results about faithful representations of $\text{Osc}_{1,0}$. Any irreducible representation is characterized by the eigenvalues of the two invariants $\hbar$ and $H = (p^2 + q^2)/2$. We denote by $\hbar$ and m , respectively, the eigenvalues of these two operators. The generators act on functions of q in the following way:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \hbar \rightarrow \hbar, \\ q \rightarrow q, \\ p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \\ H \rightarrow \frac{p^2 + q^2}{2} + m. \end{cases}$$

$\hbar$ is a nonzero number and m must be integral or half-integral. Equation (4.5) justify the name of one-dimensional oscillator group.

A slight change in Streater's investigation would provide us with the faith-

(*) As a general result, $\text{Osc}_{(n, N-n)}$ is a central extension of the direct product of n -groups isomorphic to E_2 and $N-n$ groups isomorphic to $E_{1,1}$.

ful representations of $\text{Osc}_{0,1}$. One would get

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hbar \rightarrow \hbar, \\ q \rightarrow q, \\ p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \\ H = \frac{p^2 - q^2}{2} + \mu, \end{array} \right.$$

where there is no restriction on the value of $\hbar$ and μ .

It is now very easy to consider the general case $\text{Osc}_{(n,N-n)}$. Its Lie algebra is *spanned* (*) by the direct sum of Lie subalgebras isomorphic to $\text{Osc}_{1,0}$ and $N-n$ Lie subalgebras isomorphic to $\text{Osc}_{0,1}$. It is a remarkable fact that the invariants of the Lie subalgebras are invariants of the whole Lie algebra. Consequently, an irreducible representation of $\text{Osc}_{(n,N-n)}$ contains one and only one representation of each subalgebra. The generators act on functions of the q_i 's as follows:

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hbar \rightarrow \hbar, \\ q_i \rightarrow q_i, \\ p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}, \\ H_i \rightarrow \frac{p_i^2 + \varepsilon_i q_i^2}{2} + \begin{cases} m_i & \text{if } \varepsilon_i = 1, \\ \mu_i & \text{if } \varepsilon_i = -1, \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n, \\ n+1 \leq i \leq N, \end{array} \end{array} \right.$$

and a faithful irreducible representation of $\text{Osc}_{(n,N-n)}$ is characterized by the eigenvalues $\hbar, m_i, \mu_i$. A complete basis of states is labelled for instance by $|\hbar, m_i, \mu_i; q_i\rangle$ or $|\hbar, m_i, \mu_i; p_i\rangle$.

4.3. Representations of E_2 and $E_{1,1}$. - The Lie algebras of E_2 is obtained through the homomorphism

$$(4.8) \quad \text{Osc}_{1,0} \rightarrow E_2,$$

by making $\hbar = 0$ in (4.2). In other words, any representation of E_2 is an *unfaithful* representation of $\text{Osc}_{1,0}$. The kernel is generated by $\hbar$. Similarly, by making $\hbar = 0$, one obtains the homomorphism

$$(4.9) \quad \text{Osc}_{0,1} \rightarrow E_{1,1}.$$

(*) However, it is not the direct sum, but a subgroup of the direct sum.

The only invariant of E_2 is

$$(4.10) \quad \varrho^2 = q^2 + p^2.$$

If $q \neq 0, p \neq 0$, an irreducible representation is characterized by ϱ , and defined on functions of q as follows:

$$(4.11) \quad \begin{cases} q \rightarrow q, \\ p \rightarrow \sqrt{\varrho^2 - q^2}, \\ H \rightarrow -\sqrt{\varrho^2 - q^2} i \frac{\partial}{\partial q}. \end{cases}$$

If $q = p = 0$, the irreducible representation is characterized by the eigenvalue m of H ; m is an integer or a half-integer. The representation is of dimension 1.

Similarly, the only invariant of $E_{1,1}$ is

$$(4.12) \quad \lambda^2 = p^2 - q^2.$$

We give a résumé of the results:

$\lambda^2 > 0$, $|\lambda|$ characterizes the representation

$$(4.13) \quad \begin{cases} q \rightarrow q, \\ p \rightarrow \sqrt{\lambda^2 + q^2}, \\ H \rightarrow -\sqrt{\lambda^2 + q^2} i \frac{\partial}{\partial q}. \end{cases}$$

$\lambda^2 < 0$, $i|\lambda|$ characterizes the representation. The generators act on functions of p as follows:

$$(4.14) \quad \begin{cases} p \rightarrow p, \\ q \rightarrow \sqrt{p^2 - \lambda^2}, \\ H \rightarrow -i\sqrt{p^2 - \lambda^2} \frac{\partial}{\partial p}. \end{cases}$$

$\lambda^2 = 0, q \neq 0$:

$$(4.15) \quad \begin{cases} p \rightarrow p, \\ q \rightarrow \pm p, \\ H \rightarrow -ip \frac{\partial}{\partial q}. \end{cases}$$

$p = q = 0$ (representations of dimension one).

H is an integral or half-integral number.

4.4. *Representations of physical KG of type a).* - The physical KG are isomorphic to $\text{Osc}_{1,1}$, $\text{Osc}_{1,0} \times E_{1,1}$ and $E_2 \times \text{Osc}_{0,1}$, respectively. Since we are interested in states with nonzero charge, we must restrict ourselves to representations for which the eigenvalue of Q is not zero.

We give in Table II the *physical* representations corresponding to each physical KG. By physical representation, we mean representations which correspond to physical states with nonzero charge and real positive mass, (there is no charged massless particle). The results follow readily from eqs. (4.7) to (4.13) by replacing $\hbar$ by e , the q_i 's, p_i 's by the $\tilde{\pi}_\mu$'s and the H_i 's by J or K following the sign of ε_i .

4.5. *Representations of physical KG of type b).* - This last case corresponds to the Lie algebra given in Table I (case b)). We cannot separate it into a direct sum as in the previous cases. Nevertheless, this Lie algebra can be put in the form of a semi-direct sum as it was pointed out at the beginning of this Section. The nilpotent subalgebra $\mathcal{N}$ is, in fact, a direct sum of three algebras: one generated by $\tilde{\pi}_y$, another by $\tilde{\pi}^-$ and the last is simply the Weyl algebra generated by $\tilde{\pi}^+$, $\tilde{\pi}_x$ and Q . The irreducible representations of the Weyl algebra are well known. The Abelian subalgebra $\mathcal{R}$ is generated by α_x and α_y .

Then, in this case, we apply Mackey's theory⁽⁶⁾ of induced representations to the semi-direct product $R(\oplus) N$, the general element of which is denoted by (r, n) . The irreducible representations of N which correspond to a nonzero electric charge are labelled by $Q = e$, $\tilde{\pi}^- = k^-$ and $\tilde{\pi}_y = k_y$. We discard the representations of type $(e, 0, 0)$ for physical reasons, similar to those we used in rejecting the representation $\lambda^2 \leq 0$ in case a_3), use being made of the property (3.29), $\pi^- = \tilde{\pi}^-$ and of the fact that $M^2 = 2\pi^+\pi^- - \pi_x^2 - \pi_y^2 > 0$. The element $n \in N$ is denoted by $D^{(e, k^-, k_y)}(n)$ in the representation (e, k^-, k_y) . The element $r \in R$ induces the following transformation on N^* :

$$D_r^{(e, k^-, k_y)}(n) = D^{(e, k^-, k_y)}(rnr^{-1}) = D^{(e', k'^-, k'_y)}(n).$$

One must look for orbits of R in N^* . According to (3.20), α_x commutes with e, k, k_y which is not the case for α_y whatever the triplet (e, k^-, k_y) , except for the excluded case $(e, 0, 0)$. It follows that the stability subgroup in physical cases is generated by α_x . Its elements are $\exp[i\gamma\alpha_x]$. Each value of γ defines an equivalent representation $D_\gamma^{(e, k^-, k_y)}$ as follows:

$$D_\gamma^{(e, k^-, k_y)}(n) = W(\gamma) D^{(e, k^-, k_y)}(n) W(\gamma)^{-1}.$$

For sake of simplicity, we choose the point $(e, k, 0)$ on the orbit characterized by (e, k^-) .

Let $\exp[iM^2\gamma]$ be an irreducible representation of the stability group.

TABLE II. - Physical representations of the physical KG.

	Case a_1 ($\Phi \neq 0$) E and B along the z -axis	Case a_2 ($\Phi = 0, \Delta > 0$) B along the z -axis, $E = 0$	Case a_3 ($\Phi = 0, \Delta < 0$) E along the z -axis, $B = 0$	Case b ($\Phi = 0, \Delta = 0$) E and B orthogonal B along the y -axis and E along the x -axis
Quantum numbers of the representations	e : nonzero $2m$: integer μ : real with the physical condition $2e(\beta m - \varepsilon \mu) > 0$	e : nonzero $2m$: integer λ : positive	e : nonzero q : positive μ : real	e : nonzero k^- : positive $M^2 > 0$
Q	e	e	e	$Q = e$
$\tilde{\pi}_x$	$-e\beta y$	$\sqrt{Q^2 - k_y^2}$	0	$\tilde{\pi}^+ = -ieE \frac{\partial}{\partial k_x}$
$\tilde{\pi}_y$	$-i \frac{\partial}{\partial y}$	k_y	0	$\tilde{\pi}_x = k_x$
J	$\frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2e\beta} + m$	$-i \sqrt{Q^2 - k_y^2} \frac{\partial}{\partial k_y}$	m	$\tilde{\pi}^- = k^-$
$\tilde{\pi}_t$	$-e\varepsilon z$	$\sqrt{\lambda^2 + k_z^2}$	$-e\varepsilon z$	$\tilde{\pi}_y = k_y$
$\tilde{\pi}_z$	$-i \frac{\partial}{\partial z}$	k_z	$-i \frac{\partial}{\partial z}$	$\alpha_y = \frac{k_x k_y + ik^- \frac{\partial}{\partial k_y}}{eE}$
K	$\frac{\tilde{\pi}_t^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2e\varepsilon} + \mu$	$-i \sqrt{\lambda^2 + k_z^2} \frac{\partial}{\partial k_z}$	$\frac{\tilde{\pi}_t^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2e\varepsilon} + \mu$	$\alpha_x = \frac{k_x^2 + k_y^2}{2eE} + ik^- \frac{\partial}{\partial k_x}$
Inva- riants	$\frac{2e(\beta m - \varepsilon \mu)}{2e\varepsilon(\varepsilon m + \beta \mu)}$	$\frac{2e\beta m + \lambda^2}{-\lambda^2 \beta^2}$	$\frac{-2e\varepsilon \mu - Q^2}{-\varepsilon^2 Q^2}$	$\frac{M^2 = \tilde{\pi}^2 + 2eE\alpha_x}{C = -(k^-)^2 E^2}$

Then the inducing representation is

$$\exp [iM^2\gamma] D^{(e, k^-, 0)}(n) W(\gamma) .$$

One readily sees that the induced representation will be labelled by three numbers (M^2, e, k^-) . A tedious calculation leads to the representation of the generators given in Table II, last column.

5. - Conclusion.

The investigation we made on states of electrically charged systems in constant and uniform EMF, is certainly not entirely satisfactory. We were concerned only with the degrees of freedom associated with the KG, a subgroup of the *full* kinematical group, the Poincaré group. Obviously, the KG does not act irreducibly on the Hilbert space of a given elementary charged particle.

According to a group-theoretical definition of the number of degrees of freedom given elsewhere (7), only *two* degrees of freedom are involved by the KG instead of *four* for the spinning particle and *three* for the spinless particle. Consequently, a CUIRR of the KG provides us with a *subspace of states* of an elementary particle. This property is closely related to the fact that, among the three invariants of the physical KG, only two, the charge operator Q and the squared mass operator M^2 , characterize an elementary particle. It is natural to hope that it is possible to embed KG into a larger group allowing the description of all degrees of freedom associated with an elementary particle. Of course, this group would describe the « dynamical part » and C would no longer be an invariant of it (*).

It could be thought that the following Lie group generated by $M_{\mu\nu}$, $\tilde{\pi}_\mu$ and $F_{\mu\nu}$ is large enough to describe all degrees of freedom:

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [M_{\mu\nu}, M_{e\lambda}] = i(g_{\nu e} M_{\mu\lambda} - g_{\mu e} M_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} M_{\mu e} + g_{\mu\lambda} M_{\nu e}) , \\ [M_{\mu\nu}, \tilde{\pi}_e] = i(g_{\nu e} \tilde{\pi}_\mu - g_{\mu e} \tilde{\pi}_\nu) , \\ [\tilde{\pi}_\mu, \tilde{\pi}_\nu] = -ieF_{\mu\nu} , \\ [M_{\mu\nu}, F_{e\lambda}] = i(g_{\nu e} F_{\mu\lambda} - g_{\mu e} F_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} F_{\mu e} + g_{\mu\lambda} F_{\nu e}) \end{array} \right.$$

(7) H. BACRY: *Commun. Math. Phys.*, **5**, 97 (1967).

(*) In a sense, our work is close to Ekstein's in his paper « Presymmetry » (8) in spite of the different definition of kinematics that we used. We are concerned with subgroups of the Poincaré group like $E_2 \times E_{1,1}$. EKSTEIN emphasized the role played by the Euclidean group E_3 . Nevertheless, his programme is more ambitious than ours, since he deals with all possible external fields.

(8) H. EKSTEIN: *Phys. Rev.*, **153**, 1397 (1967).

(all other Lie brackets are zero). Unfortunately, it is wrong. This group has four invariants, namely

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta(F), \\ \Phi(F), \\ \tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu + e M_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ (F^*, \tilde{\pi})^2 + e \Phi(F) M_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}, \end{array} \right.$$

the interpretation of which is evident using our results. Representations of this group can be defined on a Hilbert space of functions of $F_{\mu\nu}$ (4 variables, since Δ and Φ are constant) and of the two variables y and z used above. Consequently, no extra degrees of freedom concerning the particle are introduced in this way.

However, it is a remarkable fact that the operator

$$(5.3) \quad \tilde{\pi}_\mu \tilde{\pi}^\mu + e M_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

appears as an invariant operator whatever is the spin. This can be checked both for Klein-Gordon and Dirac equation and *assumed* in other cases. Moreover, it can be easily verified that the Lie algebra (5.1) leaves invariant the Klein-Gordon equation as well as the Dirac equation. Unfortunately this group is too small! Note that it differs, however, from our KG in that the charge operator is no longer a generator.

Another criticism which can be made concerns the search for ray representations of the KG. We proposed as physical KG *some* central extensions of the KG but not *all*. It is natural to look for interpretation of other ray representations of the KG. If we restrict ourselves to the ones which would describe charged particles, we get the following Lie algebra:

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} [G, \tilde{\pi}_\mu] = -i F_{\mu\nu} \tilde{\pi}^\nu, \\ [G^*, \tilde{\pi}_\mu] = -i F_{\mu\nu}^* \tilde{\pi}^\nu, \\ [\tilde{\pi}_\mu, \tilde{\pi}_\nu] = -i F_{\mu\nu} Q, \\ [G, G^*] = iA, \end{array} \right.$$

where A commutes with the other generators. It can be shown that, in the most general case a_1 , this Lie algebra has *only* two invariants, namely Q and A . We lose in this way the advantage of having the mass as an invariant and we did not succeed in finding an interpretation of the « observable » A .

Another conclusion of this work concerns the mass operator which coincides with the mass operator of Klein-Gordon or Dirac operators. It is a remarkable fact that if we add a Pauli term to the Dirac operator, the results of Sect. 3 and Appendix C are still valid. Therefore, the addition of a Pauli term does not provide us with an invariant operator. This is an argument in favour of the gyromagnetic value $g=2$ (*).

As we already emphasized in the Introduction, it is possible to use the same techniques we follow in this paper, to treat some other cases of EMF. It is not quite clear that, in all cases where a KG can be defined, the electric charge appears as a generator of a nontrivial central extension. For instance, in the case of the EMF created by a charged particle, the KG is isomorphic to $SO_3 \times \mathbf{R}$, since the field is spherically symmetric and invariant under time translations in the rest frame. The group $SO_3 \times \mathbf{R}$ has no nontrivial central extension and the conserved quantities obtained from the Noether-Tassie-Buchdahl theorem (**) are

$$(5.5) \quad \begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{x} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A}), \\ H = \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2} + e\varphi, \end{cases}$$

the Lie algebra of which is still that of $SO_3 \times \mathbf{R}$. Consequently, this case is not so exciting.

Another example will be treated in a forthcoming paper, namely the case of a constant and uniform EMF in the Galilean framework. The comparison between relativistic and nonrelativistic mechanics will be made there.

The authors are grateful to J. V. CORBETT for critical comments on the manuscript and to A. GROSSMANN and R. STORA for their interest in this work.

APPENDIX A

Some properties of skew-symmetric tensors of rank two (***).

The following notations are used:

$$(A.1) \quad F^{01} = E_x, \quad F^{02} = E_y, \quad F^{03} = E_z,$$

(*) The authors are grateful to Dr. ITZYKSON for suggesting the analysis of the Pauli term.

(**) When this paper was written, we received a preprint by C. PALMIERI and B. VITALE on a new generalization of the Noether theorem (preprint, Naples, 1969).

(***) See also ref. (9).

(9) H. BACRY: *Lectures in Theoretical Physics*, vol. 9 A (New York, 1967).

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

$$(A.2) \quad F^{23} = B_x, \quad F^{31} = B_y, \quad F^{12} = B_z,$$

$$(A.3) \quad \varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1,$$

$$(A.4) \quad \Delta = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2,$$

$$(A.5) \quad \Phi = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} = 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

We intend to give in this Appendix some properties of eigenvalues and eigenvectors of a tensor F . The eigenvalues are roots of the equation

$$(A.6) \quad \text{Det}(F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0,$$

or

$$(A.7) \quad 2\lambda^2 = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Phi^2}.$$

Case a) $\Delta^2 + \Phi^2 \neq 0$.

$a_1)$ $\Phi \neq 0$ According to (A.7), F has four nonzero distinct eigenvalues; consequently, F can be diagonalized. Obviously, two eigenvalues are real: $\pm\varepsilon$ and two are purely imaginary: $\pm i\beta$ (β real). Let $\bar{l}_1$ and $\bar{l}_2$ be two real eigenvectors associated with $\pm\varepsilon$, respectively and $\bar{l}^+$ and $\bar{l}^-$ two (complex-conjugate) eigenvectors associated with $\pm i\beta$, respectively. Denoting by a dot, a contracted product with respect to neighbouring indices, one can write

$$(A.8) \quad \begin{cases} F \cdot \bar{l}_1 = \varepsilon \bar{l}_1, & F \cdot \bar{l}^+ = i\beta \bar{l}^+, \\ F \cdot \bar{l}_2 = -\varepsilon \bar{l}_2, & F \cdot \bar{l}^- = -i\beta \bar{l}^-. \end{cases}$$

It is easy to check that all eigenvectors are lightlike, a consequence of the skew symmetry of F :

$$(A.9) \quad \begin{cases} \bar{l}_i \cdot F \cdot \bar{l}_i = 0, \\ \text{but} \\ \bar{l}_k \cdot F \cdot \bar{l}_k = \lambda_k \bar{l}_k^2, \quad \text{so } \bar{l}_k^2 = 0. \end{cases}$$

Let us show that $\bar{l}_1$ and $\bar{l}_2$ are both orthogonal to $\bar{l}^+$ and $\bar{l}^-$:

$$(A.10) \quad \left. \begin{aligned} \bar{l}^+ \cdot F \cdot \bar{l}_1 &= \varepsilon \bar{l}^+ \cdot \bar{l}_1 \\ \bar{l}_1 \cdot F \cdot \bar{l}^+ &= i\beta \bar{l}_1 \cdot \bar{l}^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{l}^+ \cdot \bar{l}_1 = 0.$$

Similarly,

$$(A.11) \quad \bar{l}^+ \cdot \bar{l}_2 = \bar{l}^- \cdot \bar{l}_1 = \bar{l}^- \cdot \bar{l}_2 = 0.$$

Define

$$(A.12) \quad \bar{l}^\pm = \bar{a} \pm i\bar{b}.$$

From lightlike character of $\bar{l}^\pm$, one sees that $\bar{a}$ and $\bar{b}$ are orthogonal and of

the same length. Moreover, following (A.10) and (A.11), they are orthogonal to *real* lightlike vectors; consequently they are spacelike.

We have shown that a field F (with $\Delta + i\Phi \neq 0$) possesses *two canonical orthogonal* 2-planes, one of hyperbolic type spanned by $\bar{l}_1$ and $\bar{l}_2$, and a spacelike one, spanned by $\bar{a}$ and $\bar{b}$.

If we impose the conditions of normalization

$$(A.13) \quad \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 = 1, \quad \bar{l}^+ \cdot \bar{l}^- = -1,$$

it is easy to see that F is the sum of two *canonical* plane tensors of electric and magnetic types, respectively:

$$(A.14) \quad F = \varepsilon \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2 + i\beta \bar{l}^+ \wedge \bar{l}^-.$$

The interpretation of the *scalars* ε and β readily follows: in all Lorentz basis such that $\bar{l}_1$ and $\bar{l}_2$ are in the (t, z) -plane and $\bar{l}^+$ and $\bar{l}^-$ in the (x, y) -plane, the electric and magnetic vectors are both in the z -direction and of magnitudes ε and β , respectively.

a_3) $\Phi = 0$, $\Delta < 0$. When $\Phi = 0$, two eigenvalues become zero. If $\Delta < 0$, one has $\beta = 0$ and the expression (A.14) reduces to the electric part. Let $\bar{x}$ be an eigenvector associated with the eigenvalue zero.

$$0 = \bar{x} \cdot F \cdot \bar{l}_1 = \varepsilon \bar{x} \cdot \bar{l}_1.$$

So $\bar{x}$ is orthogonal to $\bar{l}_1$ and, of course, to $\bar{l}_2$. The whole 2-plane orthogonal to $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ is an eigenspace of F . In all Lorentz basis for which $\bar{l}_1$ and $\bar{l}_2$ are in the (t, z) -plane, the field is purely electric, along the z -direction, and of magnitude ε .

a_2) $\Phi = 0$, $\Delta > 0$. A similar conclusion can be reached. There is a whole hyperbolic 2-plane as an eigenspace corresponding to the eigenvalue zero. In all Lorentz basis for which $\bar{l}^+$ and $\bar{l}^-$ are in the (x, y) -plane, the field is purely magnetic, and of magnitude β .

Case b) $\Delta^2 + \Phi^2 = 0$ ($F \neq 0$).

The four eigenvalues are now zero. Since Φ is zero, F is a plane tensor of type [9]

$$(A.15) \quad F = \bar{a} \wedge \bar{l},$$

where

$$(A.16) \quad \bar{l}^2 = \bar{a} \cdot \bar{l} = 0.$$

The whole 2-plane orthogonal to $\bar{a}, \bar{l}$ is an eigenspace. This plane and the plane spanned by $\bar{a}$ and $\bar{l}$ are both tangent to the light cone. In contrast to the preceding cases, there is no canonical value for electric or magnetic fields, but, as a *general result*, any tensor F (*) possesses two orthogonal canonical

(*) Except of course the null tensor.

2-planes. One of them is an eigenspace for the eigenvalue zero if and only if $\Phi = 0$. Its kind depends on the sign of Δ (spacelike if $\Delta < 0$, hyperbolic if $\Delta > 0$ and tangent if $\Delta = 0$).

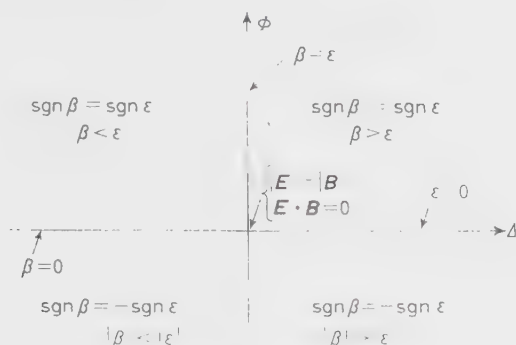


Fig. 1.

One readily obtains information about orbits of the Lorentz group in the space of skew-symmetric tensors of rank two. Since one can make the Lorentz group acting transitively on the 2-planes of a given type, there exists only *one orbit* for each value of the couple (ε, β) (*). This result is apparent from Fig. 1.

APPENDIX B

Relativistic motion of a charged particle in an external EMF.

The equation of motion is

$$(B.1) \quad \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{c}{m} \bar{u} \cdot F,$$

where τ denotes the proper time and $\bar{u}$ is the unitary speed.

Case a) $\Delta^2 + \Phi^2 \neq 0$.

Decompose the vector $\bar{u}$ in the basis built on lightlike eigenvectors of F . One gets

$$(B.2) \quad \bar{u} = \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 + \alpha^+ \bar{l}^+ + \alpha^- \bar{l}^-,$$

$$(B.3) \quad \bar{u} \cdot F = -\varepsilon(\alpha_1 \bar{l}_1 - \alpha_2 \bar{l}_2) - i\beta(\alpha^+ \bar{l}^+ - \alpha^- \bar{l}^-).$$

(*) We discard, of course, the trivial orbit corresponding to the null tensor.

By use of (B.1), one readily obtains by integration

$$(B.4) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1(0) \exp[\mu\tau], & \alpha_2 = \alpha_2(0) \exp[-\mu\tau], \\ \alpha^+ = \alpha^+(0) \exp[i\omega\tau], & \alpha^- = \alpha^-(0) \exp[-i\omega\tau], \end{cases}$$

where

$$(B.5) \quad \omega = -\frac{e\beta}{m}, \quad \mu = -\frac{e\varepsilon}{m}.$$

Since the vectors $\bar{l}_k$ are defined up to a factor, we may write the solution in the form

$$(B.6) \quad \bar{u} = \exp[\mu\tau] \bar{l}_1 + \exp[-\mu\tau] \bar{l}_2 + \exp[i\omega\tau] \bar{l}^+ + \exp[-i\omega\tau] \bar{l}^-.$$

Note that this relation is valid even if $\Phi = 0$, by putting μ or ω equal to zero.

$a_1)$ $\Phi \neq 0$. Integrating once more, one obtains

$$(B.7) \quad \bar{x} = \frac{\exp[\mu\tau]}{\mu} \bar{l}_1 - \frac{\exp[-\mu\tau]}{\mu} \bar{l}_2 + \frac{\exp[i\omega\tau]}{i\omega} \bar{l}^+ - \frac{\exp[-i\omega\tau]}{i\omega} \bar{l}^- + \bar{a},$$

where $\bar{a}$ is a constant vector. The projection of the space-time trajectory is:

- on the 2-plane $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$: a hyperbola,
- on the 2-plane $(\bar{l}^+, \bar{l}^-)$: a circle.

If one chooses a Lorentz frame of origin $\bar{a}$, such that $\bar{l}^+, \bar{l}^-$ are in the (x, y) -plane and $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ in the (t, z) -plane, the equations of motion satisfy the following relations:

$$(B.8) \quad \begin{cases} t^2 - z^2 = \text{constant}, \\ x^2 + y^2 = \text{constant}. \end{cases}$$

$a_2)$ $\varepsilon = 0$. The projection of the space-time trajectory is:

- on the 2-plane $(\bar{l}^+, \bar{l}^-)$: a circle,
- on the 2-plane $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$: a straight line.

There are Lorentz frames for which

$$(B.9) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \text{constant}, \\ z = 0. \end{cases}$$

$a_3)$ $\beta = 0$. Instead of (B.7), one obtains

$$(B.10) \quad \bar{x} = \frac{\exp[\mu\tau]}{\mu} \bar{l}_1 - \frac{\exp[-\mu\tau]}{\mu} \bar{l}_2 + (\bar{l}^+ + \bar{l}^-) \tau + \bar{a}.$$

The projection of the space-time trajectory is:

on the 2-plane $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$: a hyperbola,
on the 2-plane $(\bar{l}^+, \bar{l}^-)$: a straight line.

There are Lorentz frames for which

$$(B.11) \quad \begin{cases} t^2 - z^2 = \text{constant}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Case b) $\Delta^2 + \Phi^2 = 0$ ($F \neq 0$).

We could use the same method. We prefer give the following derivation. Suppose $\mathbf{E}$ along the x -axis and $\mathbf{B}$ along the y -axis. Put

$$(B.12) \quad \frac{e}{m} E = \frac{e}{m} B = \sigma.$$

Equation (B.1) reads

$$(B.13) \quad \begin{cases} \frac{d(u_t - u_z)}{d\tau} = \frac{du_y}{d\tau} = 0, \\ \frac{du_x}{d\tau} = (u_t - u_z)\sigma, \\ \frac{d(u_t + u_z)}{d\tau} = 2\sigma u_x. \end{cases}$$

This system of equations is readily integrated:

$$(B.14) \quad \begin{cases} u_t - u_z = a, & t - z = a\tau + \text{constant}, \\ u_y = b, & y = b\tau + \text{constant}, \\ u_x = \sigma a\tau + c, & x = \frac{\sigma a\tau^2}{2} + c\tau + \text{constant}, \\ u_t + u_z = \sigma^2 a\tau^2 + 2\sigma c\tau + d, & t + z = \frac{\sigma^2 a\tau^3}{3} + \sigma c\tau^2 + d\tau + \text{constant}, \end{cases}$$

where a, b, c, d are constants. Obviously, all constants of the second column can be replaced by zero, by a suitable choice of the origin of the Lorentz frame. One deduces that the two quantities

$$(B.15) \quad \begin{cases} \alpha_x = x(u_t - u_z) - (t - z)u_x + \frac{\sigma}{2}(t - z)^2, \\ \alpha_y = y(u_t - u_z) - (t - z)u_y, \end{cases}$$

vanish identically, a property which is used in Sect. 3 (*).

(*) Another special property can be proved: there exists an observer for which the motion is in the (x, z) -plane with a trajectory of equation $x^2 \sim z^2$. To show this, one must make use of the stability-group transformations.

APPENDIX C

Generalized Noether theorem in classical field theory.

In this Appendix, we follow the Tassie and Buchdahl method ⁽³⁾ and apply it to the Lagrangian density corresponding to a field equation. Let

$$(C.1) \quad \mathcal{L}[Q(x), Q_\mu(x), x^\mu]$$

be the Lagrangian density for the wave function $Q(x)$; the symbol $Q_\mu(x)$ denotes the derivative with respect to the μ -th component of x^μ . No restriction is made on the number of components of $Q(x)$.

Theorem. If, under an infinitesimal transformation

$$(C.2) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$(C.3) \quad Q \rightarrow Q' = Q + \delta Q,$$

the Lagrangian density transforms as follows:

$$(C.4) \quad \mathcal{L}[Q'(x'), Q'_\mu(x'), x'^\mu] = \mathcal{L}[Q(x), Q_\mu(x), x^\mu] + \partial_\sigma X^\sigma[Q(x), x^\mu],$$

where X^σ is a functional depending on $Q(x)$ and x^μ , exclusively, one has the following conserved (*i.e.* divergenceless) quantity:

$$(C.5) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\mu} \delta Q - \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q_\mu} Q_\nu - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \right) \delta x^\nu - X^\mu,$$

provided that

$$(C.6) \quad \partial_\mu \delta x^\mu = 0.$$

Proof. Hereafter, the symbol $\partial_\mu \mathcal{L}$ will denote the *total* derivative of $\mathcal{L}$ with respect to x^μ , and $\partial_\mu \mathcal{L}$ the *partial* derivative. One readily writes

$$(C.7) \quad \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} Q_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\nu} Q_{\mu\nu},$$

where $Q_{\mu\nu}$ is the second derivative of Q .

Expanding (C.4) and using (C.7), one gets

$$(C.8) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\mu} \delta Q_\mu + \left(\partial_\mu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\nu} Q_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\nu} Q_{\mu\nu} \right) \delta x^\mu - \partial_\mu X^\mu = 0,$$

where δQ_μ denotes $\partial_\mu \delta Q$.

With the aid of the Lagrange equation

$$(C.9) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\mu} \right)$$

one can put (C.8) in the form

$$(C.10) \quad \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\mu} \delta Q - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_\mu} Q_\nu - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \right) \delta x^\nu - X^\mu \right] - \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu = 0$$

and the theorem follows immediately.

We now apply the theorem to the case of an infinitesimal Poincaré transformation

$$(C.11) \quad \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu + \varepsilon^\mu.$$

Condition (C.6) is satisfied. The field Q is transformed as follows:

$$(C.12) \quad \delta Q = \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} Q,$$

where S is a matrix acting on spin space. A simple calculation gives, for the associated conserved quantity,

$$(C.13) \quad \bar{I}^\sigma = \omega_{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q)} \left[\frac{i}{2} S^{\mu\nu} Q - x^\nu \partial^\mu Q \right] + \mathcal{L} g^{\sigma\mu} x^\nu \right\} - \varepsilon_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma Q)} \partial^\mu Q - \mathcal{L} g^{\sigma\mu} \right\} - X^\sigma.$$

In the Dirac case, the Lagrangian density is

$$(C.14) \quad \mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi$$

and the Lagrange equations are

$$(C.15) \quad [\gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0,$$

$$(C.16) \quad (p_\mu + eA_\mu) \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0.$$

Due to the fact that

$$(C.17) \quad \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = 0,$$

the conserved quantities are easily obtained. One gets

$$(C.18) \quad \bar{\psi}\tilde{\pi}_\mu\psi, \quad \bar{\psi}\Gamma\psi, \quad \bar{\psi}\Gamma^*\psi,$$

where $\tilde{\pi}_\mu$, Γ and Γ^* are given by eqs. (3.40), (3.46) and (3.47) respectively.

RIASSUNTO (*)

Si dimostra che i sottogruppi del gruppo di Poincaré svolgono un ruolo particolare nel caso di sistemi carichi in un campo elettromagnetico esterno costante ed uniforme. Le rappresentazioni proiettive di questi sottogruppi coinvolgono la carica elettrica come generatrice di un fattore di fase. Le regole di additività e di superselezione per la carica appaiono come conseguenze dirette.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

Теоретико-групповой анализ элементарных частиц во внешнем электромагнитном поле.

I. Релятивистская частица в постоянном и однородном поле.

Резюме (*). — Показывается, что две подгруппы группы Пуанкаре играют особую роль в случае заряженных систем во внешнем электромагнитном поле, которое является постоянным и однородным. Проективные представления этих подгрупп включают электрический заряд, как генератор фазового множителя. Как прямые следствия, возникают аддитивность и правила супер-отбора для заряда.

(*) *Переведено редакцией.*

H. BACRY, *et al.*

1° Dicembre 1970

Il Nuovo Cimento

Serie X, Vol. 70 A, pag. 289-312

Group-Theoretical Analysis of Elementary Particles in an External Electromagnetic Field.

II. — The Nonrelativistic Particle in a Constant and Uniform Field.

H. BACRY and PH. COMBE (*)

Centre Universitaire de Marseille - Luminy

J. L. RICHARD (*)

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. - Marseille

(ricevuto il 14 Aprile 1970)

Summary. — Two subgroups of the Galilei group are shown to play a particular role in the case of charged systems in an external electromagnetic field which is constant and uniform. Projective representations of these subgroups involve the electric charge and mass as generators of phase factors. Additivity and superselection rules for charge and mass appear as direct consequences. A comparison is made with the relativistic case investigated in the first part of this article.

1. — Introduction.

In a previous paper ⁽¹⁾ hereafter denoted as I we gave a group-theoretical analysis of the motion of a relativistic particle in an external constant and uniform electromagnetic field. In this paper, we are looking for a similar investigation, but in a nonrelativistic framework; we shall follow the same steps as in I.

(*) Postal Address: Centre de Physique Théorique, C.N.R.S., 31 Chemin Joseph-Aiguier, 13 Marseille 9^e.

⁽¹⁾ H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD: *Nuovo Cimento*, **67 A**, 267 (1970).

We define the « kinematical » group (KG) of a nonrelativistic system in a given Galilean electromagnetic field (EMF) as the subgroup of the Galilei group ($\mathcal{G}$) which leaves invariant the EMF under consideration. It is clear that the breaking of $\mathcal{G}$ depends on the type of EMF we are dealing with. In the case where the EMF is constant and uniform, we shall show that the continuous unitary irreducible ray representations (CUIRR) of the KG provide us with two superselection rules, one for the Galilean mass and one for the electric charge. It is not surprising to get a superselection rule for the mass since the Galilei group itself gives such a rule⁽²⁾. The interesting feature is that, as in I, we get a superselection rule for the electric charge.

In Sect. 2, we construct the Lie algebras of the « kinematical » groups corresponding to the various constant and uniform Galilean electromagnetic field. We shall see that the cases we get are not in one-to-one correspondence with those of I.

Section 3 is devoted to the problem of the physical extensions corresponding to physical CUIRR of the KG; use is made of the Noether-Tassie-Buchdahl⁽³⁾ theorem given in I (Subsect. 3'1).

In Sect. 4 we find the CUIRR of the « kinematical » groups, lifting them by the true representations of the physical KG which is the physical central extension of the KG.

Finally, in the last Section, we discuss the physical interpretations of our results and compare them to those of paper I.

2. - The « kinematical » groups.

In this Section, we look for the various « kinematical » groups corresponding to a given constant and uniform EMF, that is to say the subgroup of the Galilei group which leaves invariant the EMF under consideration. It is clear that this subgroup contains the group of space-time translations, the generators of which are denoted by $\mathbf{P}$ and H . Consider now the action of the homogeneous Galilei group on a given field $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\mathbf{E}$ being the electric field and $\mathbf{B}$ the magnetic one. It is well known⁽²⁾ that, under the infinitesimal transformation

$$(2.1) \quad (\theta, \mathbf{v}) = 1 + i\theta \cdot \mathbf{J} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{K},$$

where $\mathbf{J}$ and $\mathbf{K}$ are the usual generators of the homogeneous Galilei group, the field $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ transforms as follows:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \theta \times \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \theta \times \mathbf{B} \end{cases}$$

⁽²⁾ J. M. LEVY-LEBLOND: *Journ. Math. Phys.*, **4**, 776 (1963).

⁽³⁾ L. J. TASSIE and H. A. BUCHDAHL: *Austr. Journ. Phys.*, **17**, 431 (1964); **18**, 109 (1965).

The parameters θ and v of the stability group can be obtained by solving the following equations:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \theta \times E - v \times B = 0, \\ \theta \times B = 0. \end{cases}$$

For obvious reasons, we discard the case of an identically vanishing EMF for which the KG is the Galilei group itself. It is easy to see that we are left with two cases, namely the case of a «pure» electric field ($B = 0$) and that of a nonvanishing magnetic field. This result is in agreement with the well-known feature that, in Galilean electromagnetism, «pure electric field» is an intrinsic notion and the magnitude $|B|$ of the magnetic vector is an invariant.

Case a_1) $E \cdot B \neq 0$. Equations (2.3) provide us with the stability group. One gets

$$(2.4) \quad \begin{cases} \theta = \epsilon B, \\ v = \epsilon' B - \epsilon E. \end{cases}$$

Therefore, its generators are, according to (2.1),

$$(2.5) \quad \begin{cases} G = J \cdot B - K \cdot E, \\ G^* = K \cdot B. \end{cases}$$

It is two-dimensional and the orbits by $\mathcal{G}$ are four-dimensional. This is in agreement with the existence of two invariants

$$(2.6) \quad B^2 \neq 0 \quad \text{and} \quad \Phi = E \cdot B.$$

Now from the Lie algebra of $\mathcal{G}$, namely

$$(2.7) \quad \begin{cases} [J, J] = iJ, \\ [J, K] = iK, \\ [J, P] = iP, \\ [K, H] = -iP \end{cases}$$

(all other brackets vanishing), one easily gets the Lie algebra of the KG; that is

$$(2.8) \quad \begin{cases} [G, P] = -iB \times P, \\ [G, H] = iE \cdot P, \\ [G^*, P] = iB \cdot P, \end{cases}$$

all other brackets vanishing.

It is clear that, since $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ is a nonvanishing invariant, neither $\mathbf{E}$ nor $\mathbf{B}$ is zero, whoever is the observer. Following (2.2), one can find a boost transforming $\mathbf{E}$ into a vector collinear to $\mathbf{B}$. Therefore, there exists an observer for whom $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are, say, in the z -direction. In that case, eqs. (2.5) become

$$(2.9) \quad \begin{cases} G = BJ_z - EK_z, \\ G^* = BK_z, \end{cases}$$

and the Lie algebra (2.8) takes the form

$$(2.10) \quad \begin{cases} [J_z, P_x] = iP_y, \\ [J_z, P_y] = -iP_x, \\ [K_z, H] = -iP_z, \end{cases}$$

all other brackets vanishing.

Case a_2) $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ with $\mathbf{B} \neq 0$. It is easily seen that the KG is the same as in case a_1). Nevertheless, it will be shown later that cases a_1) and a_2) must be investigated separately. All equations from (2.4) to (2.10) may be used, but there exist observers for whom $\mathbf{E}$ is zero (put $E = 0$ in eqs. (2.9)).

Case a_3) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \neq 0$ (pure electric field). Equations (2.3) provide us with the *four* generators of the corresponding KG:

$$(2.11) \quad L = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}.$$

L is nothing else than the generator of the rotations around the electric field and $\mathbf{K}$ are the generators of all Galilean boosts. Note that a boost does not change the value of $\mathbf{E}$, since $\mathbf{B} = 0$.

From the dimensions of the homogeneous Galilei group and of the stability group, we see that the orbit by $\mathcal{G}$ of a « pure electric field » is of dimension two, in agreement with the existence of the only invariant E^2 .

The Lie algebra of the corresponding KG is readily obtained from (2.7) and (2.11). One gets

$$(2.12) \quad \begin{cases} [L, \mathbf{P}] = -i\mathbf{E} \times \mathbf{P}, \\ [L, \mathbf{K}] = -i\mathbf{E} \times \mathbf{K}, \\ [\mathbf{K}, H] = -i\mathbf{P}, \end{cases}$$

all other brackets vanishing. This Lie algebra is 8-dimensional.

Obviously, there exists a reference frame for which the electric field is along the z -axis; consequently, if we set

$$I_i = E J_z,$$

where $E = E_z$, the Lie algebra (2.12) reads

$$(2.13) \quad \begin{cases} [J_z, P_x] = i P_y, & [J_z, P_y] = -i P_x, \\ [J_z, K_x] = i K_y, & [J_z, K_y] = -i K_x, \\ [K, H] = -i P. \end{cases}$$

So, we have defined the *two* kinematical groups of the nonrelativistic particle in a constant and uniform EMF. It is interesting to note that, contrarily to the relativistic case, these KG do not have the same dimensions. It was thus possible in the relativistic case to give a unique covariant form of the Lie algebra of the KG for all types of homogeneous EMF. Consequently, it is not always possible to obtain the Galilean KG through a contraction of the corresponding relativistic KG. This can be made only in cases α_1) and α_2) (which correspond to cases a_1) and a_2) of paper I, respectively). However, there is no Galilean counterpart of case b) of paper I.

3. - The physical « kinematical » groups.

In the previous Section we defined all the transformations leaving invariant a given EMF. All these transformations leave invariant the equations of motion in classical mechanics or the wave equation in quantum mechanics. *Therefore to each generator of the KG corresponds a conserved quantity, which is the representative of the generators in a lifting of some ray representations of the KG.* So, to look for the ray representations which occur in our problem, we must find all the conserved quantities associated with the generators of the KG. In order to find them we will use classical as well as quantum-mechanical arguments.

3.1. *Classical analysis.* - We apply the Noether-Tassie-Buchdahl theorem given in I to the Lagrangian $\mathcal{L}$ of a classical particle in a given EMF,

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, i) = \frac{1}{2} M \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{t} + e \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} - e \varphi t,$$

where $\mathbf{A}$ and φ are the vector potential and the scalar potential respectively,

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

related to the EMF by the relations

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{cases}$$

Let us recall briefly the N.T.B. theorem: if under an infinitesimal space-time transformation of the co-ordinates

$$(3.3) \quad \begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ t \rightarrow t' = t + \tau, \end{cases}$$

the change of the Lagrangian can be put in the form

$$(3.4) \quad \delta \mathcal{L} = \dot{X}(\mathbf{x}, t),$$

then there exists a corresponding conserved quantity, namely

$$(3.5) \quad Q = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tau - X = \sum_{i=1}^3 p_i u_i - \mathcal{H} \tau - X,$$

where $\mathcal{H}$ is the usual Hamiltonian and $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}_i$.

Consider first the following infinitesimal space-time translations:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}, \\ t \rightarrow t' = t + \tau. \end{cases}$$

Under these translations the change of the Lagrangian (3.1) is

$$(3.7) \quad \delta \mathcal{L} = e \boldsymbol{\epsilon} \cdot \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \right) - e \tau \left(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} + \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

from (3.4) and (3.5) we get the following conserved quantities:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{p} - e(\mathbf{A} + \mathbf{x} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}t), \\ \tilde{\pi}_t = \mathcal{H} - e(q + \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}). \end{cases}$$

Let us note that this result is valid for any choice of gauge. Consider finally the infinitesimal transformation of the homogeneous Galilei group on space-

time co-ordinates

$$(3.9) \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}t.$$

Then the change of the Lagrangian (3.1) is

$$(3.10) \quad \delta \mathcal{L} = e\boldsymbol{\theta} \cdot [\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} - \mathbf{x} \times \nabla(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{x} \times \nabla \varphi \dot{t}] + \\ + \mathbf{v} \cdot [M\dot{\mathbf{x}} + e\mathbf{A}\dot{t} + e\nabla(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A})t - e\nabla \varphi \dot{t}t],$$

or

$$(3.11) \quad \delta \mathcal{L} = \dot{X} - \frac{e}{2} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) + e(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \dot{\mathbf{x}}t,$$

where

$$(3.12) \quad X = e\boldsymbol{\theta} \cdot \left[\mathbf{x} \times \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{B}) + \mathbf{x} \times \mathbf{E}t \right] + \mathbf{v} \cdot \left[M\mathbf{x} + e\mathbf{A}t + \frac{e}{2} \mathbf{E}t^2 \right].$$

According to (3.11), $\delta \mathcal{L}$ is a total derivative whenever eqs. (2.3) are satisfied. Therefore, the generators of the transformations (3.9) are the ones we got in the preceding Section. The *conserved quantities* associated with these generators readily follow from eqs. (3.5) and (3.12). In the case of a nonvanishing magnetic field (cases a_1) and a_2), these generators G, G^* are those given by eqs. (2.5). The associated conserved quantities are

$$(3.13) \quad \begin{cases} L^1 = \left[\mathbf{x} \times \left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{B} - e\mathbf{E}t \right) \right] \cdot \mathbf{B} - \left[\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{E}, \\ L^{1*} = \left[\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{B}. \end{cases}$$

Consider now the case a_3) of a pure electric field, for which $\mathbf{v}$ is arbitrary and $\boldsymbol{\theta}$ along $\mathbf{E}$. The generators L and $\mathbf{K}$ are given by eq. (2.11). The four corresponding conserved quantities are

$$(3.14) \quad \begin{cases} A = [\mathbf{x} \times (\mathbf{p} - e\mathbf{A})] \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{K} = \left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x}. \end{cases}$$

We are now able to derive the physical central extensions of the KG; by the use of Poisson brackets, defined as follows:

$$(3.15) \quad \{u, v\} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \frac{\partial v}{\partial p^k} - \frac{\partial u}{\partial p^k} \frac{\partial v}{\partial x^k} \right),$$

it is easy to obtain the Lie algebra of the physical KG.

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

Case a_1) ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$). A simple calculation gives us

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ \Gamma, \tilde{\pi} \} = M\mathbf{E} - \mathbf{B} \times \tilde{\pi}, \\ \{ \Gamma, \tilde{\pi}_t \} = \mathbf{E} \cdot \tilde{\pi}, \\ \{ \Gamma^*, \tilde{\pi} \} = -M\mathbf{B}, \\ \{ \Gamma^*, \tilde{\pi}_t \} = -\mathbf{B} \cdot \tilde{\pi}, \\ \{ \Gamma, \Gamma^* \} = 0, \\ \{ \tilde{\pi}, \tilde{\pi} \} = -e\mathbf{B}, \\ \{ \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi} \} = -e\mathbf{E}. \end{array} \right.$$

This is a central extension of the Lie algebra (2.8), with two extra quantities, namely the mass m and the electric charge e . When one looks for nontrivial extensions of the whole Galilei group, only the mass is involved. The parallelism between mass and charge is a remarkable fact of this framework.

Choose the particular frame for which $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are along the z -axis. By comparison with (2.9), one is led to define two new generators J and K as follows:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = JB - KE, \\ \Gamma^* = KB. \end{array} \right.$$

In this new basis, the nonvanishing Poisson brackets are

$$(3.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \{ J, \tilde{\pi}_x \} = \tilde{\pi}_y, & \{ K, \tilde{\pi}_x \} = -M, \\ \{ J, \tilde{\pi}_y \} = -\tilde{\pi}_x, & \{ K, \tilde{\pi}_y \} = -\pi_z, \\ \{ \tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y \} = -eB, & \{ \tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_z \} = -eE, \end{array} \right.$$

and the corresponding conserved quantities are

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\pi}_x = p_x - eA_x - eBy, \\ \tilde{\pi}_y = p_y - eA_y + eBx, \\ \tilde{\pi}_z = p_z - eA_z - eEt, \\ \tilde{\pi}_t = \mathcal{H} - eq - eEtz, \\ J = x(p_y - eA_y) - y(p_x - eA_x) + \frac{e}{2} B(x^2 + y^2), \\ K = p_z t - eA_z t - Mz - eEt^2. \end{array} \right.$$

The motion of a Galilean particle is given by

$$(3.20) \quad \begin{cases} x = -\frac{v_{0y}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t + x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega}, \\ y = \frac{v_{0x}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t + y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega}, \\ z = \frac{e}{2M} Et^2 + v_{0z}t + z_0, \end{cases}$$

with

$$\omega = \frac{eB}{M}.$$

So, (3.19) can be written in terms of initial conditions x_0, v_0 :

$$(3.21) \quad \begin{cases} \tilde{\pi}_x = Mv_{0x} - eBy_0, \\ \tilde{\pi}_y = Mv_{0y} + eBx_0, \\ \tilde{\pi}_z = Mv_{0z}, \\ \tilde{\pi}_t = \frac{1}{2} Mv_0^2 - eEz_0, \\ J = M(x_0v_{0y} - y_0v_{0x}) + \frac{eB}{2} (x_0^2 + y_0^2), \\ K = -Mz_0. \end{cases}$$

Note that the origin of space can be chosen in such a way that the equations of motion satisfy the condition (*)

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

In that case, the « kinetic » angular momentum $x(p_y - eA_y) - y(p_x - eA_x)$, calculated with respect to the centre of the circle, is a constant of the motion and J appears as a sum of two conserved quantities.

Case a_2 ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} \neq 0$). As we already noted, this case is very similar to case a_1 and (3.16) is still valid. Nevertheless, the central extension is not the same. This can be shown by choosing the peculiar frame for which $\mathbf{E} = 0$.

(*) With such a condition, one has $\tilde{\pi}_x = \tilde{\pi}_y = 0$.

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

Defining J and K as in (3.17) but with $E = 0$, one gets

$$(3.22) \quad \begin{cases} \{J, \tilde{\pi}_x\} = \tilde{\pi}_y, & \{K, \tilde{\pi}_z\} = -M, \\ \{J, \tilde{\pi}_y\} = -\tilde{\pi}_x, & \{K, \tilde{\pi}_t\} = -\tilde{\pi}_z, \\ \{\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y\} = -eB, & \{\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z\} = 0. \end{cases}$$

Obviously, eqs. (3.22) are obtained from eqs. (3.18) by putting E equal to zero. The two corresponding Lie algebras are not isomorphic. *Nevertheless, they are both central extensions of the same Lie algebra* (2.10).

The interpretation of the conserved quantities is the same as before. One has only to make $E = 0$ in eqs. (3.19), (3.20), (3.21).

Case a_3 ($B = 0$). Equations (3.8) and (3.14) lead to the following Poisson brackets:

$$(3.23) \quad \begin{cases} \{A, \tilde{\pi}\} = -\mathbf{E} \times \tilde{\pi}, \\ \{A, \mathbf{K}\} = -\mathbf{E} \times \mathbf{K}, \\ \{\mathbf{K}, \tilde{\pi}_t\} = -\tilde{\pi}, \\ \{\mathbf{K}, \tilde{\pi}\} = -M, \\ \{\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}\} = eE. \end{cases}$$

This is the Lie algebra of a central extension of the KG of a pure electric field, *i.e.* a central extension of (2.12). As in the preceding cases, the two new generators are the mass and the electric charge. If we choose $\mathbf{E}$ along the z -direction, the Lie algebra reads

$$(3.24) \quad \begin{cases} \{J, \tilde{\pi}_t\} = \tilde{\pi}_x, & \{J, \tilde{\pi}_y\} = -\tilde{\pi}_z, \\ \{J, K_x\} = K_y, & \{J, K_y\} = -K_x, \\ \{\mathbf{K}, \tilde{\pi}_t\} = -\tilde{\pi}, & \{\mathbf{K}, \tilde{\pi}\} = -M, \\ \{\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z\} = -eE, \end{cases}$$

where J is defined by

$$(3.25) \quad A = EJ.$$

The physical interpretation of all conserved quantities is easier with such

a basis:

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\pi}_x = p_x - eA_x, \\ \tilde{\pi}_y = p_y - eA_y, \\ \tilde{\pi}_z = p_z - eA_z - eEt, \\ \tilde{\pi}_t = \mathcal{H} - e\varphi - eEz, \\ J = x\tilde{\pi}_y - y\tilde{\pi}_x, \\ K_x = \tilde{\pi}_x t - Mx, \\ K_y = \tilde{\pi}_y t - My, \\ K_z = \tilde{\pi}_z t - Mz - \frac{e}{2} Et^2. \end{array} \right.$$

So, $\tilde{\pi}_x$ and $\tilde{\pi}_y$ are the kinetic momenta along the x - and y -axis, respectively; J is the kinetic angular momentum around the z -axis and $\tilde{\pi}_t$ the total energy. Moreover, using the equations of motion, one readily sees that

$$(3.27) \quad \mathbf{K} = -M\mathbf{x}_0,$$

where $\mathbf{x}_0$ is the initial position. Note also that the expressions of $\mathcal{H}$ and $\tilde{\pi}_t$ are slightly different since

$$(3.28) \quad \mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} + e\varphi$$

is gauge-dependent, but the total energy (the conserved quantity)

$$(3.29) \quad \tilde{\pi}_t = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} - eEz$$

is not.

3'2. Quantum-mechanical analysis. — In quantum mechanics, the problem of finding the physical Lie algebras can be solved in two different ways, either by using a Lagrangian formalism of classical field theory, as was done in paper I (Appendix C), or by using the Tassie-Buchdahl way ⁽³⁾, as we did in paper I (Subsect. 3'2). The first method leads to conserved quantities, as in the classical approach. The second which we are going to use now, provides us with the generators associated with the invariance group of the Schrödinger equation:

$$(3.30) \quad \left(\mathcal{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0,$$

where

$$(3.31) \quad \mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} + e\varphi$$

for a spinless particle, and

$$(3.32) \quad \mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M} + e\varphi + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$$

if the spin is one-half.

If $\mathcal{M}$ denotes a generator of a Galilean transformation of the KG, acting on space-time and spin co-ordinates, one must be able to associate with $\mathcal{M}$ an operator X , a function of $\mathbf{x}$ and t , such that

$$(3.33) \quad \left[X(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}, \mathcal{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0.$$

Consider first a space translation generated by p_x . One readily gets

$$(3.34) \quad \left[p_x, \mathcal{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{ie}{M} \frac{\partial A_x}{\partial x} p_x + \frac{ie}{M} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z \right) p_y + \frac{ie}{M} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - B_y \right) p_z + \frac{e}{2M} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{ie^2}{M} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

both for spin zero and spin one-half.

The corresponding generator $\tilde{\pi}_x$ satisfies the condition

$$(3.35) \quad \left[\tilde{\pi}_x, \mathcal{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right] = \left[X(\mathbf{x}, t) + p_x, \mathcal{H} - i \frac{\partial}{\partial t} \right] = 0.$$

The unknown function X is obtained by identifying terms linear in $\mathbf{p}$. One gets, up to an additive constant,

$$(3.36) \quad \tilde{\pi}_x = p_x - eA_x - e(yB_z - zB_y) - eE_x t.$$

Similar calculations for other space-time translations will provide us with the other generators. The result is

$$(3.37) \quad \begin{cases} \tilde{\pi} = \mathbf{p} - e(\mathbf{A} + \mathbf{x} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}t), \\ \tilde{\pi}_t = i \frac{\partial}{\partial t} - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} - e\varphi. \end{cases}$$

Consider now the infinitesimal homogeneous Galilean transformation

$1 + i\mathcal{M}$, where

$$(3.38) \quad \mathcal{M} = \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p} + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} t.$$

The condition (3.33) is split into the following ones:

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \nabla \cdot [X + e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \mathbf{A}) + et\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}] + M\mathbf{v} + e\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x}) + et\mathbf{B} \times \mathbf{v} = 0, \\ b) \quad \frac{\partial X}{\partial t} - e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \nabla \varphi) - et\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \frac{e^2}{2M} (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \nabla A^2) - \\ \quad - \frac{e^2}{2M} t\mathbf{v} \cdot \nabla A^2 - \frac{e}{M} \mathbf{A} \cdot \nabla x = 0, \\ c) \quad \frac{e}{2M} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{B}) = 0. \end{array} \right.$$

Condition $a)$ is obtained by identification of terms containing $\mathbf{p}$. Condition $b)$ is obtained by identifying all e -terms. Condition $c)$ occurs only if the spin is one-half, and leads to the relation $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{B} = 0$ of (2.3) (*).

Note that conditions $a)$ and $b)$ are compatible if and only if eqs. (2.3) are satisfied (**).

The way of performing the integration of (3.39) depends on whether we deal with a pure electric field or not.

Cases $a_1)$ and $a_2)$ For $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{B}$ and $\mathbf{v} = -\mathbf{E}$, one gets

$$(3.40a) \quad I' = \left[\mathbf{x} \times \left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{B} - e\mathbf{E}t \right) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \mathbf{B} - \left[\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{E}$$

and by taking $\boldsymbol{\theta} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{B}$, one obtains

$$(3.40b) \quad I' = \left[\left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{B}.$$

(*) The calculation is simplified by computing separately the brackets with $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ and $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ in such a way that, in the result, $\mathbf{p}$ appears equally as a left multiplier and a right multiplier. In other words, the left-hand side $\mathbf{K}$ of $a)$ appears in the product $\mathbf{K} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{K}$.

(**) This can be shown in the following way. By computing the curl of $a)$, one gets the condition $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{B} = 0$. After having replaced ∇X in $b)$ by its expression in $a)$ and making use of the identities

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla A^2 &= 2(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) + 2\mathbf{A} \cdot \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \\ \mathbf{A} \cdot \nabla(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \mathbf{A}) &= (\mathbf{A}, \mathbf{x})(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, \nabla A^2), \end{aligned}$$

one applies the operators $\partial/\partial t$ to $a)$ and ∇ to $b)$. The condition for compatibility is given by $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

TABLE I. Lie algebras of the physical KG and their invariants.

$B \neq 0$ (cases a_1 and a_2)		
Covariant Lie algebra (cases a_1 and a_2)	Case a_1 E and B along the z -axis	Case a_2 $E=0$, B along the z -axis
$[L, \tilde{\pi}] = iME - iB \times \tilde{\pi}$	$[J, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}_y$	$[J, \tilde{\pi}_x] = i\tilde{\pi}_y$
$[L, \tilde{\pi}_t] = iE \cdot \tilde{\pi}$	$[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$	$[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$
$[L^*, \tilde{\pi}] = -iMB$	$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = -iQB$	$[\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y] = -iQB$
$[L^*, \tilde{\pi}_t] = -iB \cdot \tilde{\pi}$	$[K, \tilde{\pi}_z] = -iM$	$[K, \tilde{\pi}_z] = -iM$
$[L, L^*] = 0$	$[K, \tilde{\pi}_t] = -i\tilde{\pi}_z$	$[K, \tilde{\pi}_t] = -i\tilde{\pi}_z$
$[\tilde{\pi}, \tilde{\pi}] = -iQB$	$[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = -iQE$	$[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = 0$
$[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = -iQE$		
Invariants	Invariants	Invariants
M Q $C_1 = \tilde{\pi}_t - \frac{\tilde{\pi}^2}{2M} + \frac{Q}{M} L^*$	M Q $C_2 - C_1 = \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2M} - \frac{Q}{M} JB$	M Q $C_2 - C_1 = \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2M} - \frac{Q}{M} JB$
$C_2 = \tilde{\pi}_t - \frac{E \cdot B}{B^2} \frac{Q}{M} L^* - \frac{(\tilde{\pi} \cdot B)^2}{2MB^2} - \frac{(E \cdot B, \tilde{\pi})}{B^2}$	$C_2 = \tilde{\pi}_t - \frac{\tilde{\pi}_z^2}{2M} - \frac{Q}{M} EK$	$C_2 = \tilde{\pi}_t - \frac{\tilde{\pi}_z^2}{2M}$
$B = 0$ (case a_3)		
Covariant Lie algebra	E along the z -axis	
$[A, \pi] = -iE \times \pi$	$[J, \tilde{\pi}_t] = i\tilde{\pi}_y$	
$[A, K] = -iE \times K$	$[J, \tilde{\pi}_y] = -i\tilde{\pi}_x$	
$[K, \tilde{\pi}_t] = -i\tilde{\pi}$	$[J, K_x] = iK_y$	
$[K, \tilde{\pi}] = -iM$	$[J, K_y] = -iK_x$	
$[\pi_t, \tilde{\pi}] = -iQE$	$[K, \tilde{\pi}_t] = -i\tilde{\pi}$	
	$[K, \tilde{\pi}] = -iM$	
	$[\tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z] = -iQE$	
Invariants	Invariants	
M Q $D_1 = \tilde{\pi}_t - \frac{\pi^2}{2M} - \frac{Q}{M} K \cdot E$	M Q $D_1 = \tilde{\pi}_t - \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2 + \tilde{\pi}_z^2}{2M} - \frac{Q}{M} K_z E$	
$D_2 = A - \frac{(\tilde{\pi}, K, E)}{M}$	$D_2 = J - \frac{\tilde{\pi}_x K_y - \tilde{\pi}_y K_x}{M}$	

Case a₃) The generators are obtained by choosing θ along E and taking v arbitrary (since $B = 0$)

$$(3.41) \quad \begin{cases} A = \left[\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right] \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{K} = \left(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \frac{e}{2} \mathbf{E}t \right) t - M\mathbf{x}. \end{cases}$$

Apart from the term $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ occurring when the spin is one-half, the expressions obtained above are the same as in the classical case. Therefore, it is not surprising to get exactly the same Lie algebras. We summarize in Table I the preceding results and turn our attention to the invariants of these Lie algebras.

3.3. *Invariants of the Lie algebras of the physical KG. — Cases a₁) and a₂*). Besides the charge and mass operators denoted hereafter Q and M , respectively, there exist two other invariants, namely

$$(3.42) \quad \begin{cases} C_1 = \tilde{\pi}_t = \frac{\tilde{\pi}^2}{2M} - \frac{Q}{M} P, \\ C_2 = \tilde{\pi}^2 - \frac{E P Q}{B^2 M} P = \frac{(\tilde{\pi} \cdot \mathbf{B})^2}{2MB^2} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \tilde{\pi})}{B^2}. \end{cases}$$

It is clear that the invariant C_1 is the one which occurs in the Schrödinger equation (with or without the Pauli term describing the spin) since the Schrödinger equation is *usually* written as

$$(3.43a) \quad C_1 \psi = 0,$$

but could be written *as well*

$$(3.43b) \quad (C_1 + \text{const}) \psi = 0.$$

Consequently, as in the Galilean case, the eigenvalue of C_1 is irrelevant and can be interpreted as the internal energy. In other words, two irreducible representations corresponding to same eigenvalues of Q , M and C_2 must be considered as *physically equivalent*, even if they have different eigenvalues of C_1 .

Case a₃) The number of invariants is still the same. Besides Q and M , one has

$$(3.44) \quad \begin{cases} D_1 = \tilde{\pi}_t = \frac{\tilde{\pi}^2}{2M} - \frac{Q}{M} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}, \\ D_2 = A = \frac{(\tilde{\pi} \times \mathbf{K}) \cdot \mathbf{E}}{M}. \end{cases}$$

The invariant D_1 is still related to the Schrödinger equation, as can be shown from eqs. (3.37) and (3.41). Again its eigenvalues are *physically* irrelevant.

It is rather simple to interpret the second invariant D_2 . Using eqs. (3.37), (3.41) and (3.44), one easily gets

$$D_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}.$$

Therefore D_2 is the *intrinsic* angular momentum in the direction of the electric field.

It is more difficult to interpret C_2 . Nevertheless if we make use of classical results and equations of motion in the case where $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are parallel, one finds that $C_2 - C_1$ can be interpreted as the energy in the plane orthogonal to $\mathbf{E}$. The reader is also referred to the invariants listed in Table I.

4. - Continuous irreducible representations of the physical kinematical groups.

It is clear, from Table I, that the three Lie algebras associated with the different cases are not isomorphic; therefore, it is necessary to treat them separately. The method used hereafter is based on Mackey's theory of representations ⁽⁴⁾ and already known results on well-known groups.

Case a_1 A look at Table I, column 2, shows us that the corresponding Lie algebra contains two interesting Lie algebras as subalgebras, namely the one of the one-dimensional oscillator groups $\text{Osc}(1, 0)$ generated by J , $\tilde{\pi}_x$, $\tilde{\pi}_y$ and Q , and another one, hereafter denoted by N , generated by K , $\tilde{\pi}_t$, $\tilde{\pi}_z$, Q and M . Because Q is common to these two algebras, the physical KG is not a direct product of $\text{Osc}(1, 0)$ and N . Nevertheless, Q is an invariant of both and it is convenient to consider the direct sum $\text{Osc}(1, 0) \oplus N$, where we have replaced, in N alone, Q by Q' ; so, we identify our algebra with the subalgebra of $\text{Osc}(1, 0) \oplus N$ obtained by setting $Q' = Q$. A similar method has already been used in paper I.

The nontrivial representations of $\text{Osc}(1, 0)$ are characterized by the eigenvalue $e \neq 0$ of Q and an integral or half-integral number m . The representation (e, m) is described by

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = e, \quad J = \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2eB} + m, \\ \tilde{\pi}_x = -cBy, \quad \tilde{\pi}_y = -i \frac{\partial}{\partial y}. \end{array} \right.$$

⁽⁴⁾ C. W. MACKEY: *Induced Representations, Chicago Lectures* (1965).

It is easy to check that m is the eigenvalue of the invariant $-(M/QB)(C_2 - C_1)$. This is in agreement with our interpretation of the invariants C_1 and C_2 . We recall that C_1 is the arbitrary additive constant of the energy and $C_2 - C_1$ corresponds to the energy in the plane orthogonal to $\mathbf{E}$. So, one has

$$(4.2) \quad C_2 = C_1 - \frac{eB}{M} m,$$

as expected.

Let us now turn our attention to the structure of N . It is the semi-direct product of the group generated by K and a group which is the product of the Weyl group (generated by $\tilde{\pi}_z, \tilde{\pi}_t, Q$) by the mass phase group (generated by M). The representations of N for nonzero mass M and nonzero charge e are easily found. They are parametrized by M, e and a real number μ :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\pi}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{\pi}_t = -eBz, \\ K = \frac{2M\tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \mu. \end{array} \right.$$

The number μ is the eigenvalue of the invariant $-MC_2/QE$. Using (4.2), one obtains a relation between μ and the additive constant C_1 , such that the expression for K becomes

$$(4.4) \quad K = \frac{2M(\tilde{\pi}_t - C_1) - \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \frac{B}{E} m.$$

In the case where the additive constant C_1 is chosen to be zero, one has the relation

$$(4.5) \quad C_1 = \frac{e}{M} (Bm - E\mu) = 0.$$

Case a_2 . This is the simplest case since we are dealing with a direct product: that of $\text{Osc}(1, 0)$ by the trivial representation of N , i.e. the representation for which Q' is replaced by zero. One must keep (4.1) but replace (4.3) by

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\pi}_z = k_z, \quad \tilde{\pi}_t = w + \frac{k_z^2}{2M}, \\ K = -iM \frac{\partial}{\partial k_z}. \end{array} \right.$$

The number w appears as the eigenvalue of the invariant C_2 . The total

H. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

energy $\tilde{\pi}_t$ is given, with the aid of (4.2), by

$$(4.7) \quad \tilde{\pi}_t = C_1 + \frac{k_z^2}{2M} - \frac{eB}{M} m.$$

One sees that it is not possible, in this equation, to split spin and orbital effects, both being contained in the quantum number m . The expression (4.7) permits us to interpret, *in that case*, $\tilde{\pi}_t$ as the total energy.

Case a_3 . The Lie algebra is now ten-dimensional and can be decomposed in the following way:

$$(4.8) \quad \{J, \mathbf{K}, \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M\} = \{J\} \circ \{ \mathbf{K}, \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M \} = \{J\} \circ N.$$

where the symbol $\circ$ denotes a semi-direct sum. The invariant subalgebra $\{ \mathbf{K}, \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M \}$ is itself a semi-direct sum:

$$(4.9) \quad N = \{ \mathbf{K}, \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M \} = \{ \mathbf{K} \} \circ \{ \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M \} = \{ \mathbf{K} \} \circ N'.$$

This last invariant subalgebra is a direct sum:

$$(4.10) \quad N' = \{ \tilde{\pi}, \tilde{\pi}_t, Q, M \} = \{ \tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y, M \} \oplus \{ \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z, Q \},$$

where $\{ \tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y, M \}$ is Abelian and $\{ \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_z, Q \}$ is isomorphic to the Weyl algebra. The representations of these two algebras are well known⁽⁵⁾ and permit us to obtain immediately those of the algebra (4.10). We are still interested in those corresponding to nonzero charge and mass. They are labelled by the eigenvalues k_x, k_y, M and e of $\tilde{\pi}_x, \tilde{\pi}_y, M$ and Q , respectively. Let $D^{k_x, k_y, M, e}(n')$ be the representative of the group^(*) element $n' \in N'$ in the representation (k_x, k_y, M, e) and v an element of the group $\mathbf{R}^3$ generated by $\mathbf{K}$. The action of $\mathbf{R}^3$ on N'^* , the dual of N , is given by

$$(4.11) \quad D_{\psi}^{k_x, k_y, M, e}(n') = D^{k_x, k_y, M, e}(v n' v^{-1}) = D^{k'_x, k'_y, M', e'}(n').$$

It is easy to deduce that the orbits in N'^* by $\mathbf{R}^3$ are labelled by M and e , and that the stability group of the point $(0, 0, M, e)$ in N'^* is generated by K_z . Therefore, the inducing representation is

$$(4.12) \quad \exp [i\mu v_z] D^{0, 0, M, e}(n') W(v_z),$$

⁽⁵⁾ R. F. STREATER: *Comm. Math. Phys.*, **4**, 217 (1967).

^(*) For convenience, the same letter is used for denoting a group and its Lie algebra.

where v_z is an element of the stability group, and $W(v_z)$ is defined by the relation

$$(4.13) \quad D^{0,0,M,e}(v_z n' v_z^{-1}) = W(v_z) D^{0,0,M,e}(n') W(v_z)^{-1}.$$

The induced representation of N is now labelled by (μ, M, e) . We denote it by $I^{\mu,M,e}$.

Next, we apply once more Mackey's theory to the semi-direct product $\{J\} \rtimes N$ to obtain the representations of the physical KG. By an analogous calculation, one sees that a representation of the physical KG is labelled by the eigenvalues (μ, m, M, e) , where $2m$ is an integer. For such a representation, one has

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\pi}_x = k_x, \quad \tilde{\pi}_y = k_y, \quad \tilde{\pi}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}, \\ \tilde{\pi}_t = \frac{k_x^2 + k_y^2}{2M} - e E z, \\ J = -i \left(k_x \frac{\partial}{\partial k_y} - k_y \frac{\partial}{\partial k_x} \right) + m, \\ K_x = -i M \frac{\partial}{\partial k_x}, \quad K_y = -i M \frac{\partial}{\partial k_y}, \\ K_z = M \frac{\partial}{\partial E} - \mu. \end{array} \right.$$

If we compute the two invariants D_1 and D_2 , one finds

$$(4.15) \quad D_1 = -\frac{eE}{M} \mu,$$

which relates in a simple way the real number μ to the additive constant of the energy D_1 , and

$$(4.16) \quad D_2 = m,$$

which proves by comparison with the expression of J in (4.14), that D_2 must be interpreted as the spin component along the field E .

Note that K_z can be written in the following way:

$$(4.17) \quad K_z = \frac{2M(\tilde{\pi}_t - D_1) - \tilde{\pi}_x^2 - \tilde{\pi}_y^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2eE}$$

in a form close to (4.4).

We have given in Table II a summary of the physical representations of the various physical KG.

TABLE II. - *Physical representations of the physical kinematical groups.*

	Case a_1 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ ($\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ along the z -axis)	Case a_2 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B} \neq 0$ ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B}$ along the z -axis)	Case a_3 $\mathbf{B} = 0$ ($\mathbf{E}$ along the z -axis)
Quantum numbers of the representations	e nonzero (charge) M positive (mass) $2m$ integer μ real (unphysical)	e nonzero M positive $2m$ integer w real (unphysical)	e nonzero M positive $2m$ integer μ real number (unphysical)
Generators (besides charge and mass)	$\tilde{\pi}_x = -eBy$	$\tilde{\pi}_x = -eBy$	$\tilde{\pi}_x = k_x$
	$\tilde{\pi}_y = -i \frac{\partial}{\partial y}$	$\tilde{\pi}_y = -i \frac{\partial}{\partial y}$	$\tilde{\pi}_y = k_y$
	$J = \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2eB} + m$	$J = \frac{\tilde{\pi}_x^2 + \tilde{\pi}_y^2}{2eB} + m$	$\tilde{\pi}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$
	$\tilde{\pi}_t = -eEz$	$\pi_t = w + \frac{k_z^2}{2M}$	$\tilde{\pi}_t = \frac{k_x^2 + k_y^2}{2M} - eEz$
	$\tilde{\pi}_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$	$\tilde{\pi}_z = k_z$	$J = -i \left(k_x \frac{\partial}{\partial k_y} - k_y \frac{\partial}{\partial k_x} \right) + m$
	$K = \frac{2M\tilde{\pi}_t - \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \mu$	$K = -iM \frac{\partial}{\partial k_z}$	$K_x = -iM \frac{\partial}{\partial k_x}$
			$K_y = -iM \frac{\partial}{\partial k_y}$
			$K_z = -Mz - \frac{\tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \mu$
Invariants (besides charge and mass)	$C_1 = \frac{e}{M} (Bm - E\mu)$ (internal energy)	$C_1 = w + \frac{eB}{M} m$ (internal energy)	$D_1 = -\frac{eE}{M} \mu$ (internal energy)
	$C_2 - C_1 = -\frac{eB}{M} m$ (x - y -energy)	$C_2 - C_1 = -\frac{eB}{M} m$ (x - y -energy)	$D_2 = m$ (zero for spinless particles)

5. - Conclusion.

As was pointed out in paper I for the relativistic case, the KG's are not large enough to describe all degrees of freedom of the elementary particles. In the Galilean case the conclusion is the same. However, slight differences must be underlined in the case of a pure electric field.

Following the definition of the degrees of freedom given in ref. (6), an elementary particle has at most *four* degrees of freedom (if it is spinning) and at least three (if it is spinless or massless). To be a *perfect* candidate as a kinematical group, a group must be able to describe the *spinning* particle. In that sense, none of the nonrelativistic or relativistic KG is perfect: a simple calculation proves that in Galilean cases a_1) and a_2), the number of degrees of freedom is two, as in *all* relativistic cases a_1), a_2), a_3) and b). The corresponding KG are not even large enough to describe spinless particles completely (*i.e.* through *irreducible* representations).

The situation of the Galilean case a_3) is a privileged one, due to the fact that its KG is of higher dimension (eight instead of six) and the associated degrees of freedom are *three* in number. A look at the last column of Table II is sufficient to convince oneself that *the spinless particle in a pure Galilean electric field is completely described by an irreducible ray representation of the corresponding KG*. Obviously such a representation corresponds to the eigenvalue $m = 0$. The impossibility of changing the value of m by performing a transformation of the KG is related to the absence of spin internal motion (*), corresponding to the (missing) fourth degree of freedom (6).

At this stage, the reader is invited to establish a comparison between Table II of the present paper and Table II of paper I. If we disregard the relativistic case b), which has no counterpart in nonrelativistic electrodynamics, the comparison is easy. However, some comments seem to be necessary.

For convenience, we denote hereafter by Table II' the corresponding Table of paper I.

First, we note that the number of invariants is not the same in relativistic and nonrelativistic cases: they are three and four, respectively. This is not surprising if we have in mind the fact that the internal energy is completely arbitrary in nonrelativistic mechanics, whereas it is fixed in relativity. It is normal, in our comparison of Tables II and II', to fix this arbitrary constant, namely C_1 or D_1 , to be equal to the mass M .

Case a_1). By comparing physical representations of Tables II and II' (first columns), one readily sees that the only difference occurring in the expressions of generators is that of K . In Table II', one has

$$(5.1) \quad K = \frac{\tilde{\pi}_t^2 + \dots + \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \mu.$$

(6) H. BACRY: *Comm. Math. Phys.*, **5**, 97 (1967).

(*) Note that m does not have the same interpretation as in cases a_1) and a_2). This is easily understood because of the lack of the magnetic field $\mathbf{B}$. In cases a_1) and a_2), $\mathbf{B}$ is coupled with both orbital and intrinsic angular momenta. It is only in the case of a pure electric field that the separation between orbital and intrinsic momenta is apparent.

Replacing μ in terms of M and m , one easily gets

$$(5.2) \quad K = \frac{\tilde{\pi}_t^2 - M^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \frac{B}{E} m.$$

A similar calculation would give, from Table II,

$$(5.3) \quad K = \frac{2M(\tilde{\pi}_t - C_1) - \tilde{\pi}_z^2}{2eE} + \frac{B}{E} m.$$

If $\tilde{\pi}_t - M$ is small compared to M , one can replace in (5.2), $\tilde{\pi}_t^2 - M^2$ by

$$(5.4) \quad \tilde{\pi}_t^2 - M^2 = (\tilde{\pi}_t + M)(\tilde{\pi}_t - M) \sim 2M(\tilde{\pi}_t - M),$$

which proves that $C_1 = M$, as quoted above.

Case a_2 . The only differences concern the expression of $\tilde{\pi}_t$ and K . From Table II', one gets

$$(5.5) \quad \begin{cases} \tilde{\pi}_t = \sqrt{M^2 + k_z^2 - 2eBm}, \\ K = -i\sqrt{M^2 + k_z^2 - 2eBm} \frac{\hat{c}}{\hat{c}k_z}, \end{cases}$$

and, approximately,

$$(5.6) \quad \begin{cases} \tilde{\pi}_t \sim M + \frac{k_z^2}{2M} - \frac{eB}{M} m, \\ K \sim -iM \frac{\hat{c}}{\hat{c}k_z}, \end{cases}$$

which are exactly the expressions of Table II, when one puts $C_1 = M$.

Case a_3 . There are many differences between the two Tables; this is due to the fact that the number of degrees of freedom is larger in the nonrelativistic case. First, we can rewrite the expression of K_z of Table II, as follows:

$$(5.7) \quad K_z = \frac{2M(\tilde{\pi}_t - D_1) - \varrho^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2eE},$$

where we have replaced $k_x^2 + k_y^2$ by ϱ^2 . An analogous computation in Table II' would give

$$(5.8) \quad K_z = \frac{\tilde{\pi}_t^2 - M^2 - \varrho^2 - \tilde{\pi}_z^2}{2eE}.$$

It is easy to show that (5.7) gives, in a first approximation, the expression (5.8), provided D_1 is replaced by M .

The limiting process we have just used is very close to the contraction process used in group theory (⁷). In fact, in cases a_1) and a_2) which correspond to the same KG, it is possible to go from the relativistic KG to the nonrelativistic one through a contraction. Such a process is known to preserve the dimensionality of the group. Obviously, it is not possible to get by this way the 8-dimensional nonrelativistic KG of case a_3) from its 6-dimensional relativistic counterpart. It would be nice to generalize the contraction concept.

Let us recall that there exist two ways of interpreting contractions. In the present problem they correspond to the two following attitudes:

i) The speed of light becomes infinite. One must write explicitly the speed of light c in the expressions of the generators of the Poincaré group and take the limit $c \rightarrow \infty$ (⁸).

ii) Consider the contracted group as an approximation by imposing some restrictions. In this sense, Galilean mechanics of the *free* particle is good as far as we are concerned with small speeds (compared to c) and small intervals of space (compared to intervals of time).

This property is reflected by the fact that it is through a *speed-space contraction* (⁹) of the Poincaré group that the Galilei group is obtained. In the present problem, we are not concerned with a *free* particle, but a particle in an external EMF and it can be shown that other restrictions are needed, relative to the EMF itself. In fact, the electric fields must be small compared to magnetic fields (¹⁰) (*).

(⁷) E. J. SALETAN: *Journ. Math. Phys.*, **2**, 1 (1961); E. INONU and E. P. WIGNER: *Proc. Natl. Acad. U.S.*, **39**, 510 (1953); **40**, 119 (1954).

(⁸) H. BACRY: *Leçons sur la théorie des groupes et les symétries des particules élémentaires*, Sect. 8.6 (New York, 1967).

(⁹) H. BACRY and J. M. LEVY-LEBLOND: *Journ. Math. Phys.*, **9**, 1605 (1968).

(¹⁰) L. LANDAU and E. LIFCHITZ: *Classical Field Theory*, Chap. 3, Sect. 22 (London, 1959).

(*) This can be shown in the following way. Taking the Gaussian units system, $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ transform as follows under a boost:

$$(5.9) \quad \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right), \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B} \right). \end{cases}$$

One readily sees that, if $|\mathbf{v}| \ll c$ and $|\mathbf{E}| \ll |\mathbf{B}|$, one has in a first approximation

$$(5.10) \quad \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}, \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \end{cases}$$

II. BACRY, PH. COMBE and J. L. RICHARD

Before concluding, it is natural to insist on the possibility of using our method to solve other problems when various EMF, with symmetry properties, are given. One of the best examples concerns the motion of an electron in a periodic potential when a magnetic field is applied. As far as a discrete translation groups is concerned, the problem has been solved by ZAK in a nice article ⁽¹¹⁾ (*).

which are the nonrelativistic formulae.

On the other hand, one can choose units such that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are of the same order of magnitude. One writes, instead of (5.9),

$$(5.11) \quad \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B} & \gamma^2 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E} \right), \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} & \gamma^2 \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \end{cases}$$

One has only to take the limit $c \rightarrow \infty$ to get formulae (5.10).

⁽¹¹⁾ J. ZAK: *Phys. Rev.*, **134**, A 1602 (1964).

(*) The authors are grateful to A. GROSSMANN who provided us with references on this work and comments on related subjects.

RIASSUNTO (*)

Si mostra che due sottogruppi del gruppo di Galilei hanno un ruolo particolare nel caso di sistemi carichi in un campo elettromagnetico esterno costante ed uniforme. Le rappresentazioni proiettive di questi sottogruppi comportano come generatori dei fattori di fase la carica elettrica e la massa. L'addittività e le regole di superselezione per la carica e la massa ne risultano conseguenze dirette. Si fa un confronto con il caso relativistico studiato nella prima parte di questo articolo.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Теоретико-групповой анализ элементарных частиц во внешнем электромагнитном поле.

II: Нерелятивистская частица в постоянном и однородном поле.

Резюме авторами не представлено.

MINIMAL COUPLING AND MAGNETIC CHARGE

PH. COMBE

*Université d'Aix-Marseille, Centre de Luminy,
France*

and

J.L. RICHARD

*Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. Marseille,
France**

Received 14 June 1973

Synopsis

In this note, the most general form of the lagrangian of a particle in a constant and uniform electromagnetic field is derived using group-theoretical arguments based on Lévy-Leblond's approach to the lagrangian gauge problem. The so-called minimal coupling is derived. In the case of a purely magnetic field, it is shown that the principle of minimal coupling by the magnetic charge breaks down if the invariance of the equations of motion under space reflexion is required.

1. *Introduction.* In classical as well as in quantum theories, space-time symmetries have always provided a guiding light in the quest of fundamental laws of Physics. Within a given formalism, it is very attractive and useful to see in which way fundamental laws could be connected to some invariance properties. One may even ask if the laws describing a physical system cannot be derived just by assuming the invariance of these laws under some symmetries. A typical example is given in the classical lagrangian formalism. Indeed, one shows that the lagrangian for a free particle can be derived simply from Poincaré or galilean invariance of the equations of motion. More precisely, in a recent paper, Lévy-Leblond¹⁾ has shown the connection between the space-time transformations and their action on a lagrangian from which the usual free lagrangians are deduced.

This note is devoted to the application of Lévy-Leblond's results to the case of a particle interacting with a constant and uniform electromagnetic field. The space-time symmetry group is of course the invariance group of this field, a six-dimensional Lie group (except, however, for a pure galilean electric field). Inter-

* Postal address: Centre de Physique Théorique - C.N.R.S. 31, Chemin J. Aiguier - 13274, Marseille Cedex 2, France.

MINIMAL COUPLING AND MAGNETIC CHARGE

estingly enough, electric and magnetic charges²⁾ of the particle appear naturally without any *a priori* assumption on the type of coupling between the particle and the field. On the contrary, one *derives* the possible couplings and, in particular, the so-called minimal coupling.

Before going into this problem, we shall briefly recall Levy-Leblond's main result. We know that the lagrangian of a given system is determined up to a total time derivative of any function of the space-time coordinates of the system. Therefore under a space-time transformation g , the lagrangian of a particle behaves as follows:

$$\mathcal{L}(gx; g\dot{x}) = \mathcal{L}(x; \dot{x}) + \frac{d}{ds} \alpha(g; x), \quad (1)$$

where x denotes the space-time coordinates and $\dot{x}$ their derivatives with respect to the trajectory parameter s . Eq. (1) tells us that the equations of motion are left invariant under the transformation g . The functions $\alpha(g; x)$ are called gauge functions. These gauge functions are given by

$$\alpha(g; x) = \xi(g; h_x) - \zeta(h_{gx}^{-1}gh_x), \quad (2)$$

g being a space-time transformation of the invariance group. The notation is the following.

(i) Assuming that G acts transitively on the space-time continuum h_x is defined by

$$h_x x_0 = x, \quad (3)$$

for any space-time point x , x_0 being a given fixed point, the origin of the coordinates for instance.

(ii) $\xi(g; g')$ is any exponent^{3,4)} of G (G is a topological group) such that

$$\xi(g; \gamma) = 0, \quad (4)$$

for any γ belonging to the stability group I_{x_0} of x_0 .

(iii) $\zeta(\gamma)$ is any real continuous one-dimensional representation of I_{x_0} which cannot be extended to G .

The reader is referred to Lévy-Leblond's paper for the proof. Let us simply point out that eq. (1) gives the following equations:

$$\mathcal{L}(x; \dot{x}) = \mathcal{L}(0; g\dot{x}) - \frac{d}{ds} \alpha(g; x) \Big|_{gx=0}, \quad (5)$$

and therefore tells us about the dependence of the lagrangian with respect to the coordinates of the particle (up to a total derivative yet). Clearly, if the invariance

group G acts transitively on the phase space, then the lagrangian is explicitly constructed once we know all the gauge functions given by (2). In particular, for free particles, we are led to the usual lagrangians.

We are going to discuss these properties in the case of a particle interacting with a constant and uniform field. Section 2 is devoted to the relativistic case while section 3 deals with the nonrelativistic problem. Finally, in the last section, we investigate the case of a purely magnetic field which is in particular left invariant under space reflexion. We show that in this case the principle of minimal coupling for the magnetic charge is incompatible with the invariance of the system under space reflexion.

2. Relativistic particle. Let $F^{\mu\nu}$ denote the components of a given constant and uniform electromagnetic field. As usual, the electric and magnetic fields are defined by

$$E^i = F^{0i}, \quad B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (6)$$

respectively. The generators of the stability group⁵⁾ of this field are given by

$$G = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad G^* = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} \quad \text{and} \quad P_\mu, \quad (7)$$

where $M_{\mu\nu}$ are the Lorentz generators and P_μ the generators of space-time translations, $F^{*\mu\nu}$ being defined as

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}. \quad (8)$$

The commutation relations read

$$\begin{aligned} [G, P_\mu] &= -iF_\mu^\nu P_\nu, & [G^*, P_\mu] &= -iF^{*\mu\nu} P_\nu, \\ [G, G^*] &= 0, & [P_\mu, P_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

The central extensions of this Lie algebra are seen to be characterized by

$$[G, G^*] = id, \quad [P_\mu, P_\nu] = iF_{\mu\nu}q + iF^{*\mu\nu}q^*. \quad (10)$$

However, we must note that the central extensions of the group are not necessarily given by the central extensions of the Lie algebra⁶⁾. One can check indeed that if $B^2 - E^2 \neq 0$ or $E \cdot B \neq 0$, then the central extension characterized by $d \neq 0$ is not an extension for the group itself. Nevertheless, we shall write formally the central extensions of the group as given by the central extensions of the Lie algebra for any type of field.

An element of the stability group will be denoted by $(a, \mathcal{A}_{\gamma, \beta})$ where the four-vector a corresponds to the space-time translations while γ and β parametrize the

Lorentz transformations generated by G and G^* , respectively. In order to construct the lagrangian one needs to know the exponents ξ of the group. An elementary computation shows that we have to choose the ξ 's for which

$$\xi(a, A_{\gamma, \beta}; a', A_{\gamma', \beta'}) = \frac{1}{2} (A_{\gamma, \beta} a')^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) a^\nu - d\beta\gamma'. \quad (11)$$

Hence

$$\xi(a, A_{\gamma, \beta}; x, 1) = \frac{1}{2} (A_{\gamma, \beta} x)^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) a^\nu. \quad (12)$$

The fixed point x_0 of space-time is taken to be the origin of the coordinates so that the stability group Γ_{x_0} of x_0 is defined by the subgroup with typical element $(0, A_{\gamma, \beta})$. But according to condition (ii) of section 1, the exponents have to vanish on $\Gamma_{x_0} \times \Gamma_{x_0}$ and from (11) we see that the only possibility is to take $d = 0$. In other words, the central extension characterized by d cannot be in any case considered in a lagrangian formalism. This is satisfactory since no physical interpretation is given for d . Moreover, it is clear that a real one-dimensional representation of Γ_{x_0} can be extended to the whole group. Hence, the gauge functions we are looking for are given by

$$\alpha(\gamma, \beta, a; x) \equiv \xi(a, A_{\gamma, \beta}; x, 1) = \frac{1}{2} (A_{\gamma, \beta} x)^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) a^\nu, \quad (13)$$

according to (2). Eq. (1) then reads

$$\mathcal{L}[A_{\gamma, \beta} x + a; A_{\gamma, \beta} \dot{x}] = \mathcal{L}(x; \dot{x}) + \frac{1}{2} (A_{\gamma, \beta} \dot{x})^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) a^\nu. \quad (14)$$

If $a = 0$, we get

$$\mathcal{L}(A_{\gamma, \beta} x; A_{\gamma, \beta} \dot{x}) = \mathcal{L}(x, \dot{x}), \quad (15)$$

while for $a = -x$ and $A_{\gamma, \beta} = 1$,

$$\mathcal{L}(x; \dot{x}) = \mathcal{L}(0; \dot{x}) + \frac{1}{2} \dot{x}^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) x^\nu. \quad (15')$$

Eq. (15) tells us that the lagrangian has to be invariant under the Lorentz transformations $A_{\gamma, \beta}$ and so must be $\mathcal{L}(0, \dot{x})$. This function can only depend on the quantities which characterize the orbits of the space-time continuum under the $A_{\gamma, \beta}$ transformations. One can easily see that these quantities can be chosen to be $(F\dot{x})^2$ and $(F^*\dot{x})^2$ or equivalently $(F\dot{x})^2$ and $\dot{x}^2$. We know also that the lagrangian is homogeneous of degree $+1$ in $\dot{x}$ owing to the fact that the parameter s is arbitrary. Moreover, we want the lagrangian to be the free lagrangian when the field F vanishes. Hence, the most general expression for the lagrangian is found to be

$$\mathcal{L}(x; \dot{x}) = -m(\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} + (\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} L[(F\dot{x})^2/\dot{x}^2] + \frac{1}{2} \dot{x}^\mu (F_{\mu\nu} q + F_{\mu\nu}^* q^*) x^\nu, \quad (16)$$

where the function L vanishes with F and must be such that the equations of motion lead to $\dot{x}^2 > 0$ for any value of s .

Eq. (16) tells us about the most general lagrangian (up to a total time derivative!) we can adopt using only invariance symmetries. It is remarkable to see that the minimal coupling appears in a natural way, q and q^* being of course interpreted as the electric and magnetic charges of the particle. Clearly the function L indicates another kind of coupling between a charged particle and the electromagnetic field in contradistinction with the principle of minimal coupling⁶).

3. *The nonrelativistic particle.* In galilean electromagnetism, we have to distinguish between two types of field⁷) according to whether a magnetic field $\mathbf{B}$ is present or not. Indeed, for a nonvanishing magnetic field, the generators of the stability group are seen to be

$$G = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}, \quad G^* = \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{P} \text{ and } H, \quad (17)$$

while for $\mathbf{B} \equiv 0$, the generators are

$$L = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}, \mathbf{P} \quad \text{and} \quad H, \quad (18)$$

where $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{P}$ and H are the generators of the rotations, galilean boosts and translations, respectively. We first consider the case $\mathbf{B} \neq 0$.

3.1. $\mathbf{B} \neq 0$. We shall choose $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ along the z axis. The central extensions for the invariance group can be seen from the following commutation relations

$$\begin{aligned} [J_z, K_z] &= 0; & [J_z, P_x] &= iP_y; & [J_z, P_y] &= -iP_x; & [K_z, H] &= -iP_z, \\ [K_z, P_z] &= -im; & [H, P_z] &= -iqE + iq^*B; & [P_x, P_y] &= -iqB. \end{aligned} \quad (19)$$

The exponents are easily computed and read:

$$\begin{aligned} &\xi(b, a, v, R_\varphi; b', a', v', R_{\varphi'}) \\ &= m(\tfrac{1}{2}v^2b' + va'_z) - q[(a_zb' + \tfrac{1}{2}vb'^2)E + (R_\varphi a')_x a_y B] \\ &\quad + q^*(a_zb' + \tfrac{1}{2}vb'^2)B, \end{aligned} \quad (20)$$

where v and R_φ denote a boost along and a rotation around the z axis, respectively.

Again we take the origin of the coordinates as the fixed point x_0 . The stability group of this point is obviously defined by the typical element $(0, \theta, v, R_\varphi)$. One can check that the exponent (20) vanishes on $G \times \Gamma_{x_0}$ as required. Moreover, any one-dimensional representation of Γ_{x_0} can be extended to the whole invariance

group. According to eq. (2), one then gets the gauge functions which read

$$\begin{aligned} \alpha(b, a, v, R_\varphi; x, t) = & m(\tfrac{1}{2}v^2t + v_z) - q[(a_zt + \tfrac{1}{2}vt^2)E \\ & + (R_\varphi x)_x a_y B] + q^*(a_zt + \tfrac{1}{2}vt^2)B. \end{aligned} \quad (21)$$

The invariance property (1) of the lagrangian thus leads to the equation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t; \dot{x}, \dot{t}) &= \mathcal{L}(R_\varphi x + vt + a, t + b; R_\varphi \dot{x} + v\dot{t}, \dot{t}) - m(\tfrac{1}{2}v^2\dot{t} + v\dot{z}) \\ &+ q[(a_z\dot{t} + v\dot{t}t)E + (R_\varphi \dot{x})_x a_y B] - q^*(a_z\dot{t} + v\dot{t}t)B, \end{aligned} \quad (22)$$

where $v = (0, 0, v)$. It then follows that

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t; \dot{x}, \dot{t}) &= \mathcal{L}(0, 0; R_\varphi \dot{x}, \dot{t}) + \tfrac{1}{2}m(\dot{z}/\dot{t}) - q(z\dot{t}E + x\dot{y}B) + q^*z\dot{t}B, \end{aligned} \quad (23)$$

with $x = (x, y)$. If we require the lagrangian to be the free lagrangian when the electromagnetic field vanishes, then the most general form is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t; \dot{x}, \dot{t}) &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2/\dot{t}) + L(\dot{x}^2 + \dot{y}^2, \dot{t}) - q(z\dot{t}E + x\dot{y}B) + q^*z\dot{t}B. \end{aligned} \quad (24)$$

Again, as in the relativistic case, the lagrangian is not entirely defined and the same comments apply.

3.2. $B = 0$. We gave at the beginning of this section the eight generators of the corresponding invariance group. The central extensions can be seen through the following commutation relations:

$$[K_i, P_j] = -im\delta_{ij}, \quad [H, P_i] = -iq\delta_{ij}, \quad [K_i, K_j] = id\epsilon_{ijk}E_k. \quad (25)$$

The extension characterized by d has no physical interpretation but we shall see that this extension does not play any role in a lagrangian formalism. Indeed, the exponents of the group can be seen to be represented by

$$\begin{aligned} \xi(b, a, v, R_\varphi; b', a', v', R_{\varphi'}) &= m(\tfrac{1}{2}v'^2b' + v \cdot R_\varphi a') - q(\tfrac{1}{2}b'^2v + b'a) \cdot E + d(v \times R_\varphi v) \cdot E \end{aligned} \quad (26)$$

and ξ has to vanish on $G \times \Gamma_{x_0}$. The typical element of Γ_{x_0} is $(0, 0, v, R_\varphi)$. One can check that ξ vanishes on $G \times \Gamma_{x_0}$ if the extension d is rejected. Thus, we shall consider only exponents for which $d \equiv 0$. The corresponding gauge functions are

then given by

$$\alpha(b, a, v, R_\varphi; x, t) \equiv \xi(b, a, v, R_\varphi; t, x, \theta, 1), \quad (27)$$

since there is no one-dimensional representation which cannot be extended to the whole invariance group. Hence, condition (1) reads

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, t; \dot{x}, \dot{t}) &= \mathcal{L}(R_\varphi x + vt + a, t + b; R_\varphi \dot{x} + v\dot{t}, \dot{t}) \\ &- m(\frac{1}{2}v^2 + v \cdot R_\varphi \dot{x}) + q(vt + at) \cdot E; \end{aligned} \quad (28)$$

choosing

$$a = -R_\varphi x + (t/\dot{t}) R_\varphi \dot{x}, \quad v = -(1/\dot{t}) R_\varphi \dot{x} \quad \text{and} \quad b = -t, \quad (29)$$

one gets

$$\mathcal{L}(x, t; \dot{x}, \dot{t}) = \mathcal{L}(\theta, 0; \dot{\theta}, \dot{t}) + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2/\dot{t}) - q\dot{t}x \cdot E. \quad (30)$$

Since the lagrangian is homogeneous of degree +1 in $\dot{x}, \dot{t}$, the first term on the right is a total derivative and can therefore be ignored. We thus get exactly the minimal coupling, of course in a particular electromagnetic gauge. In this case, no unknown coupling is involved simply because the invariance group acts in fact transitively on the space of motions which is defined as the set of points $(x, \dot{x}, t)$.

4. *Space reflexion and the magnetic coupling.* In the classification⁵⁾ of the relativistic constant and uniform electromagnetic fields under the Poincaré group, one shows that there exists only one case for which the stability group contains space reflexion. This case is defined through the conditions

$$B^2 - E^2 > 0, \quad E \cdot B = 0. \quad (31)$$

A purely magnetic field belongs to this class and we know that it is left invariant under space reflexion. We shall consider this particular field. The stability group is made of the group considered in section 2 together with the space reflexion $\mathcal{P}$ which is defined as a space-time transformation by the equations

$$\mathcal{P}x = -x, \quad \mathcal{P}t = t. \quad (32)$$

Its action on the generators of space-time translations is then

$$\mathcal{P}P_\mu \mathcal{P} = g_{\mu\mu} P_\mu \quad (\text{without summation over } \mu), \quad (33)$$

where $g_{00} = +1$, $g_{ii} = -1$. From the commutation relations (10), we deduce that

$$\mathcal{P}q\mathcal{P} = q \quad \text{and} \quad \mathcal{P}q^*\mathcal{P} = -q^*. \quad (34)$$

MINIMAL COUPLING AND MAGNETIC CHARGE

As is expected, eqs. (34) show that the electric charge is a scalar while the magnetic charge q^* is a pseudoscalar in agreement with Maxwell's equations. In particular, we see that the parity operation $\mathcal{P}$ is made of a pure space reflexion together with the magnetic-charge conjugation as has been proposed by Ramsey⁹).

One shows then that the exponents of the invariance group of the purely magnetic field $\mathbf{B}$ chosen along the z axis are given by

$$\xi(a, A_{\gamma, \beta}, \varepsilon; a', A_{\gamma', \beta'}, \varepsilon') = qB\varepsilon(A_{\gamma, \beta}a')_x a_y, \quad (35)$$

where $(a, A_{\gamma, \beta}, \varepsilon)$ denotes the typical element of the invariance group. The parameter ε takes the value ∓ 1 according to whether we introduce the parity operation $\mathcal{P}$ or not. As we see the exponents (35) are characterized only by the electric charge q in contradistinction with the exponents given in section 2. That the magnetic charge does not appear in (35) can be simply understood. Indeed, let us consider the group generated by G, G^*, P_μ, q, q^* and the parity operation $\mathcal{P}$. The unitary representations of this group for which q and q^* are real numbers correspond to unitary ray representations of the invariance group under consideration. But according to (34), there is no representation for which q^* is represented by a number except when $q^* = 0$. This is why the magnetic charge does not show up in (35).

Accordingly, the lagrangian we derive using (35) reads

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = -m(\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{\frac{1}{2}} + (\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{\frac{1}{2}} L\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}\right) + qB\dot{x}y. \quad (36)$$

This lagrangian does not depend on the magnetic charge by means of a minimal coupling. In other words, invariance under space reflexion is incompatible with the notion of minimal coupling for the magnetic charge. We cannot say, however, that an elementary particle cannot carry a magnetic charge since the function L in (36) might involve the magnetic charge. But then we would get a type of coupling which has nothing to do with the minimal coupling.

However, let us point out that we may consider a particle as made of pairs of magnetic charges with opposite sign so that its total magnetic charge would vanish. But then the particle would not be elementary any more and other degrees of freedom than its position and velocity would be involved. In this case, the lagrangian would depend not only on x and $\dot{x}$ but also on internal variables for which our formalism is unable to give any information.

Let us note also that we could have used a simpler argument to show the vanishing of q^* . Indeed, if we impose the invariance of the lagrangian (16) under the space reflexion when the field $F^{\mu\nu}$ is a purely magnetic field, we see directly that we would have been led to the same result. In fact, the previous derivation is a justification of this simple argument.

What can be said about time reversal? We know that a purely electric field is left invariant by time reversal. However, the same reasoning cannot apply as before without some caution. Indeed, we have to define carefully what is meant by time reversal. Time reversal is usually defined as the transformation which reverses the velocities and is represented as an antiunitary operator. Under these assumptions, one can check from (10) that the electric charge commutes with time reversal while the magnetic charge anticommutes. We then are just in the same situation we were for the parity operation and the same result can be derived.

Let us finally restate our results. We have seen that invariance of the equations of motion under the connected stability group of a constant and uniform electromagnetic field leads to couplings which contain in particular the minimal coupling in relativistic as well as in nonrelativistic classical mechanics. Also, the principle of minimal coupling for the magnetic charge breaks down when invariance under space reflexion is introduced in the case of a purely magnetic field.

Acknowledgments. The authors are grateful to Professor H. Bacry for a careful reading of the manuscript and critical comments.

REFERENCES

- 1) Levy-Leblond, J. M., Commun. math. Phys. **12** (1969) 64.
- 2) Dirac, P. A. M., Phys. Rev. **74** (1948) 817. For some general considerations see Schwinger, J., Science **165** (1969) 757.
- 3) Bargmann, V., Ann. Math. **59** (1954) 1.
- 4) Hammermesh, M., Group Theory, Addison-Wesley Publ. Co. (New York, Reading, 1964) ch. 12.
- 5) Bacry, H., Combe, Ph. and Richard, J. L., Nuovo Cimento **67A** (1970) 267.
- 6) Levy-Leblond, J. M., Galilei Group and Galilean Invariance, in Group Theory and Application, E. M. Loebl, ed., Academic Press (New York, 1971) vol. 2.
- 7) Levy-Leblond, J. M., Ann. Physics **57** (1970) 481.
- 8) Bacry, H., Combe, Ph. and Richard, J. L., Nuovo Cimento **70A** (1970) 289.
- 9) Ramsey, N. F., Phys. Rev. **109** (1958) 225.

T R O I S I E M E P A R T I E

Opérateurs de Møller pour un atome dans un champ laser.

MÖLLER OPERATORS FOR AN ATOM IN A LASER FIELD

by

Philippe COMBE^{*}

Eric MOURRE^{**} and Jean-Louis RICHARD^{**}

ABSTRACT : The motion of an hydrogenoid atom in a laser field is usually given by the time-dependent hamiltonian

$$H(t) = [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2/2 + V(r) \quad \text{where } V(r) \text{ is the}$$

atomic potential while $\vec{A}(t)$ is to be connected with the laser field. The self-adjointness of $H(t)$ and the existence and unicity for the Cauchy problem of the solutions of the corresponding Schrödinger equation are established under mild conditions on $\vec{A}(t)$ and $V(r)$. The existence of Möller operators is established in two cases, namely, when the laser field is a function of time only and when it vanishes asymptotically in time. Special attention is paid for the Coulomb case for which a "distorted" Möller operator is derived. Finally, when the laser field vanishes as $t \rightarrow \infty$, the photoionization probability is properly defined by means of the Möller operator

$\Omega(H_{A\infty}, H) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U_{A\infty}(t)^{-1} U(t)$
where $U(t)$ is the evolution operator for the system while $U_{A\infty}(t)$ is the evolution operator for the atom.

June 1974

74/P.621

^{*} Université d'Aix-Marseille II, U.E.R. Scientifique de Luminy

^{**} Centre de Physique Théorique - CNRS Marseille - France

POSTAL ADDRESS : Centre de Physique Théorique - C.N.R.S.
31, chemin Joseph Aiguier
13274 MARSEILLE CEDEX 2 (France)

I .. INTRODUCTION

=====

The multiphotoinization of hydrogenoid or rare gaz atoms by a laser beam has received special attention both experimentally [1] and theoretically [2]. The availability of higher and higher intense beams leads us to abandon the perturbative expansion approach. Other kinds of approximation have been proposed [3] in the framework of a semi-classical treatment in which the photon beam is regarded as a classical external field. However, the non perturbative approximations are motivated by arguments based on pure classical mechanics. We then feel it necessary to have a global analysis of the Schrödinger equation used to describe the multiphotoinization process. This is the aim of this paper.

It is physically reasonable to assume that the system under consideration can be reduced to the interaction of an electron with a central potential (the atomic potential seen by the electron) and with the external radiation field. More precisely the hamiltonian to be considered will be written as

$$H(t) = \frac{1}{2} [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2 + V$$

when expressed in atomic units, where V denotes the central potential while $\vec{A}(t)$ is the electromagnetic potential for the radiation field.

As we see, this hamiltonian is explicitly time dependent due to the type of external field we are considering so that we are dealing with the time dependent Schrödinger equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t) \psi(t)$$

In section II, we show that under rather mild conditions on V and $\vec{A}(t)$, the hamiltonian $H(t)$ can be defined as a self-adjoint operator with domain $\mathcal{D}(H_0)$, $-H_0$ being the self-adjoint extension of the laplacien Δ . And then by Yoshida's theorem [4], one proves the existence of solutions of the Schrödinger equation and their unicity for the Cauchy problem.

The following two sections are concerned with two different aspects. In section III, we are dealing with the scattering problem that is, with the existence of the Möller operator

$$\Omega(H, H_E) \equiv s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} U_E(t, t_0)$$

where $U(t, t_0)$ denotes the unitary evolution operator of the system under the hamiltonian $H(t)$ while $U_E(t, t_0)$ is the evolution operator for the electron in the external field, that is, for the hamiltonian

$$H_E(t) = \frac{1}{2} [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2$$

The Möller operator $\Omega(H, H_E)$ is shown to exist in the case of a pure time-dependent electric field without any assumption on its behaviour as t tends to infinity. The central potential V is assumed to be square-integrable or of Hack's type. Also special attention has been paid for the Coulomb case and distorted Möller operators have been defined in a way to be connected with Dollard's approach [5] to Coulomb scattering.

In section IV, the ionization problem is considered. We define the photoionization probability when the laser beam vanishes asymptotically in time. By investigating the existence of the Möller operator

$$\Omega_{\epsilon}(H, H_{At}) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} e^{-i(t-t_0)H_{At}}$$

and

$$\Omega_{\epsilon}(H, H) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i(t-t_0)H_{At}} U(t, t_0)$$

where H_{At} is defined to be the atomic system hamiltonian we show that the atomic system can be in a scattering state as well as in a bound state.

THE EVOLUTION

We intend to investigate the evolution of a system governed by the time-dependent hamiltonian

$$H(t) = \frac{1}{2} [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2 + V \quad (1)$$

to be defined in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. We denote by $p_i, i=1,2,3$, the differential operator $-i \frac{\partial}{\partial x_i}$. The potential $A_i(t), i=1,2,3$ is defined as a multiplication operator namely,

$$(A_i(t)\psi)(\vec{x}) = A_i(t, \vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad \psi \in \mathcal{D}(A_i(t)) \quad (2)$$

We assume that

(i) $V \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) + \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^3)$. In particular, this implies that V is Kato-tiny [6] relative to H_0 . We say that an operator B is Kato-tiny relative to A if $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ and if given $\alpha > 0$, arbitrarily small, there exists $b > 0$ such that

$$\|B\psi\| \leq \alpha \|A\psi\| + b \|\psi\| \quad \text{for all } \psi \in \mathcal{D}(A) \quad (3)$$

(ii) $A_i(t, \vec{x}), i=1,2,3$ are real functions, differentiable relative to $\vec{x}$.

(iii) $A_i(t)$ and $\partial_i A_i(t)$ are bounded operators, i.e., $\|A_i(t)\| = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} |A_i(t, \vec{x})| < +\infty$ and $\sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} |\frac{\partial}{\partial x_i} A_i(t, \vec{x})| < \infty$

for each t

Lemma 1 :

Under these assumptions, the operator

$$B(t) = -\frac{1}{2} [\vec{p} \cdot \vec{A}(t) + \vec{A}(t) \cdot \vec{p}] + \frac{1}{2} \vec{A}(t)^2 + V \quad (4)$$

is symmetric and Kato-tiny relative to H_0 .

Proof : It is well-known that $\mathcal{D}(p_i) \supset \mathcal{D}(H_0)$. Hence, according to our hypothesis, one first notes that

$$\mathcal{D}(B(t)) \supset \mathcal{D}(H_0) \quad (5)$$

Moreover, from assumptions (ii) and (iii), we have the estimate

$$\|B(t)\psi\| \leq \|\vec{A}(t)\| \|\vec{p}\psi\| + \|V\psi\| + [\|\partial_i A_i(t)\| + \frac{1}{2} \|\vec{A}(t)^2\|] \|\psi\| \quad (6)$$

for $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$.

Using then the Kato-tiny property of V and of the p_i 's relative to H_0 , the proof is easily completed.

From this lemma and the Kato-Rellich theorem [7], one can assert that $H(t)$ is a self-adjoint operator with domain $\mathcal{D}(H_0)$. We see in particular that the domain of $H(t)$ is independent of t .

In order to prove the existence of a unique solution of the Schrödinger equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = -i H(t) \psi(t) \quad (7)$$

with given initial condition $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$ at time $t = t_0$

we add the following assumptions

(iv) $A_i(t)$ and $\partial_i A_i(t)$ are bounded operators uniformly on every finite interval of time t .

(v) the maps $t \rightarrow A_i(t)$ and $t \rightarrow \partial_i A_i(t)$ are strongly differentiable and $\frac{\partial}{\partial t} A_i(t)$ and $\frac{\partial}{\partial t} \partial_i A_i(t)$ are bounded.

Under the assumptions (i) - (v), we get

Lemma 2

a) The operator $B(t)$ is Kato-tiny relative to H_0 uniformly in t , i.e., given an arbitrarily small, there exists $b > 0$ such that

$$\|B(t)\psi\| \leq a \|H_0\psi\| + b \|\psi\| \quad \text{for all } \psi \in \mathcal{D}(H_0)$$

on any finite interval of time. And there exists E_0 such that $H(t) \geq -E_0 + 1$.

b) $[H(t) + E_0]^{-1}$ is strongly differentiable and $\|[H(t) + E_0] \frac{d}{dt} [H(t) + E_0]^{-1}\|$ is bounded.

Yoshida's theorem [8]

Let $H(t)$ be a time-dependent self-adjoint operator fulfilling the properties a) and b) of lemma 2. Then, for any $\psi \in \mathcal{D}(H(t))$ there is a unique strongly continuous function $\psi(t)$ solution of (7) with $\psi(t_0) = \psi$ and $\|\psi(t)\| = \|\psi\|$ for any finite interval of time.

Proof of lemma 2 : Statement a) is easily derived using Eq.(6) and assumption iv). The existence of an E_0 such that

$H(t) + E_0 \geq 1$ is a direct consequence of the uniform Kato-tiny property of $B(t)$. Note also that the resolvent

$$R(t) = [H(t) + E_0]^{-1} \tag{8}$$

exists and has norm less than 1 .

Statement h) is a direct consequence of assumptions (iv) and (v). If we denote by $V(t)$ the time dependent part of $H(t)$, namely

$$V(t) = -\frac{1}{2} [\vec{A}(t) \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}(t)] + \frac{1}{2} \vec{A}(t)^2 \quad (9)$$

one easily shows that the strong derivative $\dot{R}(t)$ of $R(t)$ is given by

$$\dot{R}(t) = -R(t) \dot{V}(t) R(t) \quad (10)$$

since $V(t)$ is seen to be strongly differentiable by (iv) and (v). One then derives the boundedness of $\dot{V}(t) R(t)$ from the boundedness of $\frac{d}{dt} A_i(t)$, $\frac{d}{dt} \partial_i A_i(t)$ and $p_i R(t)$
Q.E.D.

Yoshida's theorem proves the existence of a unitary evolution operator defined by

$$\Psi(t) = U(t, t_0) \Psi \quad , \quad t \geq t_0 \quad (11)$$

which can be extended to all of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. The family of the strongly continuous unitary operators $U(t, t_0)$ has the following properties

$$U(t, t) = 1 \quad (12)$$

$$U(t, s) U(s, t_0) = U(t, t_0) \quad \text{for } t_0 \leq s \leq t .$$

Moreover $U(t, t_0)$ is strongly differentiable on $\mathcal{D}(H_0)$ and such that for any $t \geq t_0$ and $\Psi \in \mathcal{D}(H(t)) \equiv \mathcal{D}(H_0)$

$$\frac{d}{dt} U(t, t_0) \Psi = -i H(t) U(t, t_0) \Psi \quad (13)$$

III - EXISTENCE OF THE MÖLLER OPERATOR IN THE CASE OF A UNIFORM ELECTRIC FIELD

We now restrict ourselves to the case of an electric field depending only on time. The vector potential in (1) is chosen to be a differentiable real function of t and therefore $A_i(t)$ is the multiplication by a real number for every t .

Let us recall that the "free" motion of the particle is governed by the hamiltonian

$$H_E(t) = \frac{1}{2} [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2 \quad (14)$$

And one can see that the corresponding unitary propagator is then

$$U(t, t_0) = \exp -i \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2} (t - t_0) - \vec{\alpha}(t, t_0) \cdot \vec{p} + \beta(t, t_0) \right\} \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_i(t, t_0) &= \int_{t_0}^t A_i(s) ds \\ \beta(t, t_0) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \vec{A}(s)^2 ds \end{aligned} \quad (16)$$

We want to investigate the existence of the Möller operator defined as

$$\Omega_{t_0}(H, H_E) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} U_E(t, t_0) \quad (17.a)$$

For sake of simplicity, we shall take $t_0 = 0$ and denote $U(t, 0)$ and $U_E(t, 0)$ by $U(t)$ and $U_E(t)$ respectively. We then define

$$\Omega(t) = U(t)^{-1} U_E(t) \quad (17.b)$$

Let us then state some well-known results [9] in

Lemma 3

Let $\{\Omega(t)\}$ be a family of unitary operators. Then

a) If $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) \psi$ exists for all ψ in a dense set of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, then this limit exists for all ψ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$

b) If $\frac{\partial}{\partial t} \Omega(t) \psi$ exists, belongs to $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ and is continuous with respect to t and if the integral

$$I(\psi, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega(t) \psi \right\| dt \quad (18)$$

exists for some τ , then $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega(t) \psi$ exists.

As it has been done when $U_E(t)$ is the actual free motion [9], one can derive an estimate on $\left\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega(t) \psi \right\|$ for $U_E(t)$ given in (15). This estimate follows from the representation

$$[U_E(t) \psi](\vec{x}) = (2i\pi t)^{-3/2} e^{-i\beta(t,0)} \int d^3y e^{i[\vec{x} + \vec{\alpha}(t,0) - \vec{y}]^2/2t} \psi(\vec{y}), \quad t > 0 \quad (19)$$

for all $\psi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Hence,

$$|[U_E(t) \psi](\vec{x})| \leq C_{\psi} t^{-3/2} \quad (20)$$

where $C\psi$ is a constant depending on ψ . One can then state the

Theorem 1

If $V \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, then $\Omega_{t_0}(H, H_E) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} U_E(t, t_0)$ exists.

Since the estimate (20) is the same as it is for the actual free motion, the proof of Th.1 follows the same steps.

Note that one could as well use gaussian functions, the finite sums of which are dense in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, to get the existence of $\Omega_{t_0}(H, H_E)$ for potentials of Hack's type, i.e., such that $(1+|x|)^{-1/2+\varepsilon} V \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Note also that the proof for the strong limit of as t tends to $-\infty$ can be derived along the lines developed by Prugovečki and Tip [10].

When the central potential V corresponds to Coulomb forces it is well known [5] that one cannot construct the Möller operators in the usual sense. Dollard however has introduced a substitute which in our case has to be modified. We propose to define a unitary "distorted free" propagator $\tilde{U}_{Ec}(t)$ according to

$$U_{Ec}(t) = U_E(t) \exp -i D(t) \quad (21)$$

where the operator $D(t)$ is assumed to be defined on the set of functions belonging to $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ whose Fourier transform vanishes in some neighbourhood of the axis of the electric field $\vec{E}$ assuming that $\vec{E}$ has a fixed direction. The action

of $D(t)$ is then given by ^(*)

$$[D(t)\tilde{f}](\vec{k}) = \int_0^t \frac{ds}{V[\vec{k}s - \vec{\alpha}(s)]^2} \tilde{f}(\vec{k}) \quad (22)$$

where $\tilde{f}$ denotes the Fourier transform of $f \in \mathcal{S}$. On a one hand, $\mathcal{S}_c$ is dense in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$, on the other hand $\exp -iD(t)$ can be defined as the multiplication operator on $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ by a function defined almost everywhere in $\mathbb{R}^3$ and of modulus one.

We want to show that lemma 3 can be applied to the distorted operator

$$\Omega_c(t) = U(t)^{-1} U_{\varepsilon c}(t) \quad (23)$$

According to lemma 3, part a), it is enough to show the existence of the strong limit of $\Omega_c(t)$ on $\mathcal{S}_c$. Moreover it is clear

(*) The expression of $D(t)$ is suggested by an heuristic argument similar to the argument developed by Buslaev and Matveev [12] for Coulomb like scattering.

In classical Mechanics, the Lagrangian of the system under consideration reads

$$L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 - \dot{x} \cdot \vec{A}(t) - 1/2$$

so that the Lagrange equations are

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{\vec{x}}{2^3} \quad \text{and} \quad \vec{p} = \dot{\vec{x}} + \vec{A}(t)$$

These equations show that for large r the motion of the particle is approximately given by

$$\vec{x} = \vec{p}t - \vec{\alpha}(t)$$

Substituting $\vec{x}$ by its approximate expression in the Hamiltonian of the particle, one gets

$$H(t) \approx [\vec{p} - \vec{A}(t)]^2/2 + [\vec{p}t - \vec{\alpha}(t)]^{-1/2}$$

which will give in quantum mechanics the asymptotic motion of the particle by means of the evolution operator (21).

that $\Omega_c(t)f$, $f \in \mathcal{S}_c$, is differentiable and that $\frac{\partial}{\partial t} \Omega_c(t)f$ is continuous in t . One gets

$$\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega_c(t)f \| = \| [V + \frac{\partial}{\partial t} D(t)] U_{EC}(t)f \|, f \in \mathcal{S}_c \quad (24)$$

where now V is the Coulomb potential, $V(x) = -1/|x|$

Following Dollard, we expect $U_{EC}(t)f$ to be decomposed into the sum of two functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ for any f in $\mathcal{S}_c$. Since $\frac{\partial}{\partial t} D(t)f$ belongs to $\mathcal{S}_c$ for f in $\mathcal{S}_c$, we shall have a similar decomposition which will be written as

$$U_{EC}(t) \frac{\partial}{\partial t} D(t)f = h_1(t) + h_2(t) \quad (25)$$

This decomposition is required to fulfill the following two equations

$$V f_1(t) + h_1(t) = 0 \quad (26)$$

and

$$\int_{\tau}^{+\infty} \| V f_2(t) + h_2(t) \| dt < \infty \quad \text{for some } \tau > 0. \quad (27)$$

This is precisely stated in the following

Lemma 4

a) Let $g \in \mathcal{S}_c$. Then, $U_{EC}(t)g$ can be decomposed into

$$U_{EC}(t)g = g_1(t) + g_2(t) \quad (28)$$

with

$$g_1(t)(\vec{x}) = (it)^{-3/2} e^{-i\beta(t)} \varphi(\vec{x}, t) \tilde{g}[(\vec{x} + \vec{\alpha}(t))/t] \quad (29)$$

where

$$\varphi(\vec{x}, t) = e^{i[\vec{x} + \vec{\alpha}(t)]^2/2t} \exp -i \int_0^t d\alpha \left\{ [(\vec{x} + \vec{\alpha}(s)) \cdot \vec{\alpha}(s)/t - \vec{\alpha}(s)]^2 \right\}^{1/2} \quad (30)$$

and

$$g_2(t)(\vec{x}) = (2i\pi t)^{-3/2} e^{-i\beta(t)} e^{i[\vec{x} + \vec{\alpha}(t)]^2/2t} R_g(\vec{x} + \vec{\alpha}(t), t) \quad (31)$$

where

$$R_g(\vec{x}, t) = \int d^3x' e^{-i\vec{x} \cdot \vec{x}'/t} [e^{i\vec{x}'^2/2t} - 1] [e^{-iD(t)} g](\vec{x}') \quad (32)$$

b) For any $f \in \mathcal{S}_c$ with $h = \frac{\partial}{\partial t} D(t) f$, Eqs (26) and (27) hold with the decomposition (29) (31) given above.

The proof of lemma 4, part a), is quite simple. Let $g \in \mathcal{S}_c$, then $\exp -i D(t) g$ is also in $\mathcal{S}_c$ so that one can use the representation (19) to get

$$[U_{oc}(t) g](\vec{x}) = (2i\pi t)^{-3/2} e^{-i\beta(t)} e^{i[\vec{x} + \vec{\alpha}(t)]^2/2t} \int d^3x' e^{-i[\vec{x} - \vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{x}'/t} [e^{-iD(t)} g](\vec{x}') \quad (33)$$

$$+ (2i\pi t)^{-3/2} e^{-i\beta(t)} e^{i[\vec{x} + \vec{\alpha}(t)]^2/2t} \int d^3x' e^{-i[\vec{x} - \vec{\alpha}(t)] \cdot \vec{x}'/t} [e^{i\vec{x}'^2/2t} - 1] [e^{-iD(t)} g](\vec{x}')$$

Using the Fourier transform of g ,

$$\tilde{g}(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x g(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (34)$$

and the representation (22) of $D(t)$ in momentum space, one sees that the first term on the right hand side of (33) is precisely $g_1(t)(\vec{x})$ while the second is seen to be $g_2(t)(\vec{x})$

It is now straightforward to show that Eq(26) holds for $f \in \mathcal{S}_c$ and $h = \frac{\partial}{\partial t} D(t) f$. Indeed, on a one hand we have

$$[V f_1(t)](\vec{x}) = -\frac{1}{|\vec{x}|} f_1(t)(\vec{x}) \quad (35)$$

on the other hand

$$h_1(t)(\vec{x}) = (it)^{-3/2} e^{-i\beta(t)} \varphi(\vec{x}, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} D(t) \tilde{f} \right] ((\vec{x} + \vec{x}(t))/t) \quad (36)$$

Using then the representation of $\frac{\partial}{\partial t} D(t)$ derived from (22) in momentum space, we get

$$h_1(t)(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} f_1(t)(\vec{x}) \quad (37)$$

Comparing (35) and (37), one immediately gets Eq(26). For Eq(27) to hold, one needs some more properties which are given in the following

Lemma 5

Let $g \in \mathcal{S}_c$; then we have the estimate

$$|R_g(\vec{x}, t)| \leq C (\text{Log } t)^\mu t^{-1/2} [1 + \vec{x}^2/t^2]^{-n}, \quad t > 1 \quad (38)$$

for some constants n, C and μ , R_g being defined in (32).

From this lemma, one gets the estimates

$$\|V f_2(t)\| \leq c' (\log t)^{\mu} t^{-3/2}, \quad t > 1$$

and

$$\|k_2(t)\| \leq c'' (\log t)^{\mu} t^{-3/2}, \quad t > 1 \quad (39)$$

when $k \equiv \frac{\partial}{\partial t} D(t) f$. From these estimates, Eq(27) holds and lemma 4 is thus proven. The proof of lemma 5 is given in Appendix A.

We are now in a position to prove that the integral

$$I_c(f, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega_c(t) f \right\| dt \quad (40)$$

exists for any $f \in \mathcal{S}$. Indeed, from the series of equalities

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega_c(t) f \right\| &= \left\| \left[V + \frac{\partial}{\partial t} D(t) \right] U_{oc}(t) f \right\| \\ &= \left\| V U_{oc}(t) f + U_{oc}(t) \frac{\partial}{\partial t} D(t) f \right\| \end{aligned} \quad (41)$$

and from the decomposition given in Part (a) of lemma 4 and its properties given in the part (b), one gets

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} \Omega_c(t) f \right\| = \left\| V f_2(t) + k_2(t) \right\| \quad (42)$$

which has been shown to be integrable from some τ to ∞

We therefore have proven

Theorem 1'

Let the "distorted free" evolution operator $U_{EC}(t)$ be defined as in (21) and let $V(\vec{x})$ be the Coulomb potential. Then, the distorted Möller operator

$$\Omega_{t_0}(H, H_E) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} U_{EC}(t, t_0)$$

is seen to exist on all of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

Finally, let us note that the range of the wave operator $\Omega_{t_0}(H, H_E)$ has an interesting physical meaning in the problem of ionization. Indeed, let ψ be a vector in the range of this wave operator. Then, there exists a vector φ such that $\psi = \Omega_{t_0}(H, H_E) \varphi$ with the property that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \| U(t, t_0) \psi - U_E(t, t_0) \varphi \| = 0$$

That is, for large time the state $U(t, t_0) \psi$ behaves as the "free state" $U_E(t, t_0) \varphi$ and therefore corresponds to the ionization of the atom.

IV - THE MULTIPHOTOIONIZATION PROBLEM

=====

In the photoionization of atoms by a laser beam, the experiment consists in measuring the number of ions which one gets during the time of interaction of the laser beam with the atoms. In this section, we therefore assume that the laser beam vanishes as t tends to infinity. Then, asymptotically in time, we are left with the atomic system alone and we have to define the corresponding hamiltonian which we denote by H_{At} . In order to have a gauge independent formalism, we formally define

H_{At} to be

$$H_{At} = [\vec{p} - \vec{A}(\infty)]^2/2 + V \quad (43)$$

where $A_i(\infty)$ denotes the multiplication operator

$$[A_i(\infty)\psi](\vec{x}) = A_i(\infty, \vec{x}) \psi(\vec{x}), \psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3), i=1,2,3 \quad (44)$$

with

$$A_i(\infty, \vec{x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} A_i(t, \vec{x}) \quad (45)$$

In order for this limit to exist, it is enough to assume that

vi) the electric field $E_i(t, \vec{x})$ is such that for t large enough there exists C and C' for which

$$(a) \quad \|E_i(t)\| = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} |E_i(t, \vec{x})| \leq C t^{-\lambda} \quad \text{with } \lambda > 1, i=1,2,3$$

$$(b) \quad \|\partial_i E_j(t)\| = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial_i}{\partial x_i} E_j(t, \vec{x}) \right| \leq C' t^{-\lambda'} \quad \text{with } \lambda' > 1, i,j=1,2,3$$

With assumption vi(a), H_{At} is a well-defined self-adjoint operator with domain $\mathcal{D}(H_0)$ according to Section I assuming that $A_i(\infty)$ is a bounded operator.

Moreover, using Maxwell equations and assumption vi(b) one can show that there exists a function $\Lambda(\vec{x})$ such that

$$A_i(\infty, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda(\vec{x}) \quad (46)$$

Writing then symbolically the operator $A_i(\infty)$ as $\partial_i \Lambda$ one can check that the hamiltonian (43) of the atom is unitarily equivalent to the usual hamiltonian

$$H = \vec{p}^2/2 + V \quad (43')$$

the unitary transformation being given simply by

$$W = \exp i \Lambda \quad (47)$$

Clearly this transformation is to be connected with a gauge transformation.

As a direct consequence, the spectrum of H_{At} is the same as the spectrum of H so that it is meaningful to ask for the atomic system to be found asymptotically in time in a bound state or in a scattering state.

We are then led to the

Theorem 2

Under assumptions i)...v) and if in assumption vi) $\lambda > 2$, then the Möller operators

$$\Omega_{t_0}(H, H_{At}) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} e^{-i(t-t_0)H_{At}} \quad (48.a)$$

and

$$\Omega_{t_0}(H_{At}, H) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i(t-t_0)H_{At}} U(t, t_0) \quad (48.b)$$

exist on all of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Moreover

$$U(t, t_0) = \Omega_t(H, H_{At}) e^{-i(t-t_0)H_{At}} \Omega_{t_0}(H_{At}, H) \quad (49)$$

These Möller operators have to be distinguished from the one we defined in Section III. Indeed, no assumption was made about the behaviour in time of the external field. On the contrary, assumption vi) indicates that the external field vanishes asymptotically so that we are left with the atomic system alone. It is then meaningful to ask for the existence of the Möller operators $\Omega_{t_0}(H, H_{At})$ and $\Omega_{t_0}(H_{At}, H)$.

We are then in position to define the ionization probability which is the physical quantity to be measured. Let ψ be the initial state of the system then after the interaction of the atom with the laser beam has taken place, the state of the system is seen to be $\Omega_{t_0}(H_{At}, H) \psi$ in the so-called interaction picture. If we denote by $P_c(0, M)$ the spectral projection on the subspace of the absolute continuous spectrum interval $(0, M)$ of H_{At} , the ionization probability will be given by

$$W_{\psi, M}(t_0) = \| P_c(0, M) \Omega_{t_0}(H_{At}, H) \psi \|^2 \quad (50)$$

Proof of theorem 2 : The first statement of theorem 2 is quite easily derived. Indeed, according to lemma 3, one has to show that the integral

$$I_{At}(\psi, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} \left\| \frac{d}{dt} U(t)^{-1} e^{-itH_{At}} \psi \right\| dt, \quad t_0=0 \quad (51)$$

exists for some τ with ψ belonging to some dense set. Due to the strong differentiability of the unitary propagators on $\mathcal{D}(H_0)$, we have

$$I_{At}(\psi, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} \left\| V'(t) e^{-itH_{At}} \psi \right\| dt, \quad \psi \in \mathcal{D}(H_0) \quad (52)$$

where now the interaction hamiltonian is seen to be

$$V'(t) = -\frac{1}{2} \left\{ [\vec{A}(t) - \vec{A}(\infty)] \cdot \vec{p} + \vec{p} [\vec{A}(t) - \vec{A}(\infty)] \right\} + \frac{1}{2} [\vec{A}(t)^2 - \vec{A}(\infty)^2] \quad (53)$$

Hence, one gets the estimate

$$\begin{aligned} I_{At}(\psi, \tau) &\leq \sum_{i=1}^3 \int_{\tau}^{\infty} dt \left\| A_i(t) - A_i(\infty) \right\| \left\| p_i e^{-itH_{At}} \psi \right\| \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\tau}^{\infty} dt \left\{ \left\| \partial_i A_i(t) - \partial_i A_i(\infty) \right\| + \left\| A_i(t)^2 - A_i(\infty)^2 \right\| \right\} \left\| \psi \right\| \end{aligned} \quad (54)$$

Let us note first that the operator $p_i [H_{At} + i]^{-1}$ is a bounded operator so that

$$\left\| p_i e^{-itH_{At}} \psi \right\| \leq \left\| p_i [H_{At} + i]^{-1} \right\| \left\| [H_{At} + i] \psi \right\|, \quad \psi \in \mathcal{D}(H_0) \quad (55)$$

Then, according to assumption vi), one can check that the second integral of the right hand side of (53) and the integral

$\int_{\tau}^{\infty} dt \left\| A_i(t) - A_i(\infty) \right\|$ are seen to converge for τ large enough provided that the electric field and its first derivatives

vanish faster than t^{-2} as t tends to infinity.

The second statement of theorem 2 is proven if we again show that the integral

$$I_{\text{tot}}(\psi, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} \|V'(t) U(t) \psi\| dt \quad (56)$$

exists for some τ and with $\psi \in \mathcal{D}(H_0)$. The proof is to be compared with the one given by Dollard [11], for instance. We first get the estimate (53) but where now $\exp -it H$ is to be replaced by $U(t)$.

Again, if we prove that $\|p_i U(t) \psi\|$ is uniformly bounded, we shall be finished. The proof of the uniform boundedness of $\|p_i U(t) \psi\|$ is rather lengthy and is given in Appendix B.

In section II, we have shown that the Möller operator $\Omega(H, H_E)$ exists under assumptions i) - v) when the electric field is a function of time only. Clearly, if we add assumption vi) of section IV, one can show that $\Omega(H, H_0)$ exists as well. Indeed, one sees that for the integral

$$I_0(\gamma, \tau) = \int_{\tau}^{\infty} dt \|B(t) e^{-it H_0} \psi\|$$

to exist we can use the estimate

$$\begin{aligned} I_0(\gamma, \tau) &\leq \int_{\tau}^{\infty} dt \|V e^{-it H_0} \psi\| + \sum_{i=1}^3 \int_{\tau}^{\infty} dt \|A_i(t)\| \|p_i e^{-it H_0} \psi\| \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \int_{\tau}^{\infty} dt \|A_i(t)\|^2 \|\psi\|, \quad \psi \in \mathcal{D}(H_0) \end{aligned}$$

remembering that we had chosen a gauge for which $A_i(t)$ is a

function of time only. The first integral is seen to exist for square integrable potentials V (to be connected with theorem 1) and for Coulomb like potentials when H_0 is replaced by the distorted free hamiltonian (Dollard [5]). The second and third integrals are also finite due to assumption vi), the choice of the gauge and the estimate

$$\|p_i e^{-i t H_0} \psi\| \leq \|p_i [H_0 + i]^{-1} \psi\| \| [H_0 + i] \psi \|, \psi \in \mathcal{D}(H_0).$$

Therefore, the integral $\bar{I}_0(\psi, \tau)$ exists and so for the Möller operator

$$\Omega_{t_0}(H, H_0) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t, t_0)^{-1} e^{-i(t-t_0)H_0}$$

By theorem 2, we proved the existence of $\Omega_{t_0}(H_{At}, H)$ and $\Omega_{t_0}(H, H_{At})$ so that one might think that by the chain rule theorem [13], one would derive the existence of the Möller operator $\Omega_{t_0}(H_0, H)$. This is true only if

$$\Omega(H_0, H_{At}) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{i(t-t_0)H_0} e^{-i(t-t_0)H_{At}}$$

exists in which case

$$\Omega_{t_0}(H_0, H) = \Omega(H_0, H_{At}) \Omega_{t_0}(H_{At}, H)$$

However, in general, it is only the generalized wave operator

$$\Omega'(H_0, H_{At}) = s\text{-}\lim e^{i t H_0} e^{-i t H_{At}} P_c(0, \infty)$$

which exists and then one would have the existence of $\Omega(H_0, H)$ only if the range of $\Omega_{t_0}(H_{At}, H)$ is contained in the domain of $P_c(0, \infty)$. But since $\Omega_{t_0}(H, H_{At})$ exists on all of $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ the range of $\Omega_{t_0}(H_{At}, H)$ is $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ so that the chain rule theorem applies only if $P_c(0, \infty) = \mathbb{1}$, that is, if

H_{At} has no bound states !

APPENDIX A

=====

LEMMA 5

Let $h(x) \in \mathcal{S}_c$, then for $\log t > 1$ and for any integers n there exists a number μ and a constant C such that

$$|R_h(\vec{x} + \vec{\alpha}(t), t)| \leq C (\log t)^\mu t^{-1/2} \left[1 + \frac{(\vec{x} + \vec{\alpha}(t))^2}{t}\right]^{-n} \quad (A.1)$$

where

$$R_g(\vec{x}, t) = \int d^3x' e^{-i\vec{x} \cdot \vec{x}'/t} [e^{i\vec{x}'^2/2t} - 1] [e^{-iD(t)} g](\vec{x}') \quad (A.2)$$

To prove this lemma, let us recall that

$$[e^{-iD(t)} h](\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i \int_{t_0}^t [(k^2 - \vec{\alpha}(s))^2]^{1/2} ds} \hat{h}(\vec{k}) \quad (A.3)$$

where $\hat{h}$ is the Fourier transform of h .

Then for any integer m_1, m_2, m_3, n there exist constants C and μ such that

$$\left| (1 + \vec{x}^2)^n \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} [e^{-iD(t)} h](\vec{x}) \right| \leq C (\log t)^\mu \quad (A.4)$$

To prove this, if we note that $[e^{-iD(t)} h](\vec{x}) \in \mathcal{S}_c$ it is possible to limit ourselves to the proof of the estimate (A.4)

for $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Integrating by parts in (A.3) and remembering that $\hat{h}(\vec{k}) \in \mathcal{S}_c$ we get

$$\left| (1 + \vec{x}^2)^n [e^{-iD(t)} h](\vec{x}) \right| \leq (2\pi)^{-3/2} \int d^3k \left| \hat{h}_n(\vec{k}, t) \right| \quad (A.5)$$

where

$$\hat{h}_n(\vec{x}, t) = \hat{h}_{n-1} - \Delta \hat{h}_{n-1} + [\vec{\nabla} D(\vec{x}, t)]^2 h_{n-1} + i \vec{\nabla} D \cdot \vec{\nabla} h \quad (\text{A.6})$$

and $h_1 = h$

use being made of the property $\Delta_k D(k, t) = 0$.

The expression of $|\hat{h}_n(\vec{k}, t)|$ can be given as a polynomial in $|\vec{\nabla} D|$ and

$$|\vec{\nabla} D| = \int_{t_0}^t s^{-1} ds |\vec{k} - \vec{\alpha}(s)/s|^{-2} \leq \int_{t_0}^t s^{-1} ds |\vec{k}_\perp|^2$$

where $\vec{k}_\perp$ is orthogonal to the $\vec{E}$ -direction. Then

$$|\vec{\nabla} D| \leq |\vec{k}_\perp|^{-2} \log t/t_0 \quad (\text{A.7})$$

If $\log t > 1$ we can multiply all the terms in $\hat{h}_n(\vec{x}, t)$ by some power of $\log t$ such that

$$|(1+x^2)^n [e^{-iD(t)} h](\vec{x})| \leq c (\log t)^\mu \quad (\text{A.8})$$

where $\mu \geq 2n$, $2n$ being the degree of the polynomial.

Let us consider now Eq(A.2). Using the estimate

$$|e^{i\chi/2t} - 1| \leq \left| \frac{\chi^2}{2t} \right| \quad (\text{A.9})$$

and Eq(A.4), we find that

$$|R_R(\vec{x} + \vec{\alpha}(t), t)| \leq c' (\log t)^{\mu'} t^{-1} \quad (\text{A.10})$$

Now, integrating by part in (A.2), remembering that $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ remarking that the derivatives with respect to x_i of $e^{i x^2/2t}$

are bounded for $t \geq \delta > 0$, and using (A.4) we find

$$|R_h(\vec{x} + \vec{\alpha}(t), t)| \leq c'' (\log t)^{\mu''} \left[1 + \left(\frac{|\vec{x} + \vec{\alpha}(t)|}{t} \right)^2 \right]^{-n} \quad (\text{A.11})$$

The bound (A.1) is now obtained by means of (A.10) and (A.11).

APPENDIX B

=====

UNIFORM BOUNDEDNESS OF $\|p_i U(t)\psi\|$

Let us define $U_n(t)$ as

$$U_n(t) = X_n X_{n-1} \dots X_1 \quad (B.1)$$

where

$$X_k = e^{-i(t_k - t_{k-1})H(t_k)} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (B.2)$$

with $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ and $t_{k-1} < \tau_k < t_k$.

It is well-known [4] that $U(t)$ is the strong limit of $U_n(t)$ as the mesh $\delta = \max_i (t_i - t_{i-1})$ tends to zero. We first show that

$$\|p_i U_n(t)\psi\| \leq C, \quad \psi \in \mathcal{D}(H_0) \quad (B.3)$$

where C depends on ψ only.

The operator $p_i [H(t) + i]^{-1}$ is bounded for every finite t and moreover

$$\|p_i [H(t) + i]^{-1}\| \leq \mu \quad (B.4)$$

uniformly in t .

The uniform boundedness is easily derived from the Kato-tiny property of $B(t)$ [see section II]. Hence we deduce the estimate

$$\|P_i U_n(t) \psi\| \leq \mu \| [H(\tau_n) + i] U_n(t) \psi \| \quad (\text{B.5})$$

which obviously reduces to

$$\|P_i U_n(t) \psi\| \leq \mu \| [H(\tau_n) + i] X_{n-1} X_{n-2} \dots X_1 \psi \| \quad (\text{B.6})$$

Define then

$$u_k = \| [H(\tau_k) + i] X_{k-1} X_{k-2} \dots X_1 \psi \|, \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{B.7})$$

we have

$$u_n \leq \| [V(\tau_n) - V(\tau_{n-1})] X_{n-1} X_{n-2} \dots X_1 \psi \| + u_{n-1} \quad (\text{B.8})$$

where $V(t)$ has been defined in (9). Hence, one gets

$$u_n \leq (1 + \mu d_n) u_{n-1} + c_n \quad (\text{B.9})$$

with

$$d_k = \sum_{i=1}^3 \| A_i(\tau_k) - A_i(\tau_{k-1}) \| \quad (\text{B.10})$$

and

$$c_k = \frac{1}{2} \| \vec{A}(\tau_k)^2 - \vec{A}(\tau_{k-1})^2 \| \quad (\text{B.11})$$

For sake of simplicity, we have assumed to be in the Coulomb gauge for which $\sum_{i=1}^3 \partial_i A_i(t) = 0$. Clearly, this res-

triction is not essential for the proof.

Hence,

$$u_n \leq \prod_{k=2}^n (1 + \mu d_k) u_1 + \left\{ \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{j=k+1}^n (1 + \mu d_j) c_k + c_n \right\} \|\psi\| \quad (\text{B.12})$$

so that

$$u_n \leq \prod_{k=2}^n (1 + \mu d_k) \left\{ u_1 + \sum_{k=2}^n c_k \right\} \quad (\text{B.13})$$

The quantity $\prod_{k=2}^n (1 + \mu d_k)$ is estimated in the following way

$$\begin{aligned} \log \prod_{k=2}^n (1 + \mu d_k) &\leq \mu \sum_{k=2}^n d_k \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=2}^n \|A_i(\tau_k) - A_i(\tau_{k-1})\| \\ &\leq \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=2}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \|E_i(s)\| ds \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Defining

$$L = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty \|E_i(s)\| ds \quad (\text{B.15})$$

one gets

$$\prod_{k=2}^n (1 + \mu d_k) \leq e^{\mu L} \quad (\text{B.16})$$

Next we see that

$$\sum_{k=2}^n c_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left\| \frac{\partial}{\partial s} \vec{A}(s)^2 \right\| ds \leq a L \quad (\text{B.17})$$

with

$$a = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+ \\ i=1,2,3}} \|A_i(s)\| \quad (\text{B.18})$$

Finally, if we note that

$$u_1 \leq \|\psi\| \tag{B.19}$$

one has the estimate

$$\|p_i U_n(t) \psi\| \leq \mu u_n \leq \mu e^{\mu L} (1 + aL) \tag{B.20}$$

which shows that $\|p_i U_n(t) \psi\|$ is bounded uniformly in n and t . Hence, from the strong convergence of $U_n(t)$ one deduces that $\|p_i U(t) \psi\|$ is also bounded uniformly in t .

Q.E.D.

- R E F E R E N C E S -

- [1] P AGOSTINI, G. BARJOLT, J.F. BONNAL, G. MAINFRAY,
C MANUS, J. MORELLEC,
I.E.E.E. J. Quantum Electron, Q.E.4, 667 (1968).
- P AGOSTINI, G. BARJOLT, G. MAINFRAY, C. MANUS, J. THEBAULT,
I E E E J Quantum Electron, Q.E.6, 182 (1970).
- B. HELD, G. MAINFRAY, C. MANUS, C. MORELLEC
Xème Conférence on : "Phenomeca in Ionized Gases"
London (1971), Donald Pearsons- England.
Phys. Rev. Lett. 28, 130, (1972).
- M LU VAN, G. MAINFRAY, C. MANUS, I. TUGOV,
Phys. Rev. A 7, 91 (1973)
- G.A. DELONE, N.B. DELONE, G.K. PISKOVA
Zh. Eksp. Teor. Fiz. 62, 1272 (1972)
Engl. Trans. Soviet. Physics J.E.T.P. 35, 672 (1972)
See also : Xè Conference on "Phenomeca in Ionized Gases"
London (1971).
- [2] L.V. KELDYSH
Zh. Eksp. Teor. Fiz., 47, 1945 (1964).
(See also Phys. J.T.E.P., 20,
- H.B. BEBB, A. GOLD
Phys. Rev., 143, 1 (1968).
- V.M. MORTON
Proc. Phys. Soc., 92, 301 (1967).
- Y. GONTIER, M. TRAHIN
Phys. Rev., 4 A, 1896 (1971).
- [3] H.R. REISS
Phys. Rev., A 1, 803 (1970).
Phys. Rev., D 4, 3533 (1971).
- F.H.M. FAISAL
J. Phys., B 6, L89 (1973).

- [4] K. YOSIDA
Functional Analysis (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
New York 1968), Ch. XIV Sect. 4 .
- [5] J.D. DOLLARD
J. Math. Phys., 5, 729 (1964).
- [6] B. SIMON
Quantum Mechanics for Hamiltonians defined as
Quadratic Forms - Princeton University Press 1971
Ch. II, p. 32 .
- [7] B. SIMON
Ibid. App., p. 206 .
- [8] B. SIMON
Ibid. Ch. II, p. 54 .
- [9] B. SIMON
Ibid. Ch. IV, p. 102 .
- [10] E. PRUGOVECKI, A. TIP
"Scattering Theory in a Time-Dependent External Field"
To appear : J. Phys. A, 1974 .
- [11] J.D. DOLLARD
J. Math. Phys., 7, 802 (1966).
- [12] V.S. BUSLAEV and V.B. MATVEEV
Theor. Math. Phys., 2, 226 (1970).
- [13] T. KATO
Perturbation Theory for Linear Operators
(Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1966),
chap. X § 3, p. 532.

Physique - Luminy

74/T.E.7

